Е.В. Аксенюшкина

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ: ДИСТАНЦИОННОЕ ОБУЧЕНИЕ

Учебное пособие

Министерство образования и науки Российской Федерации
Байкальский государственный университет

Е.В. Аксенюшкина

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ: ДИСТАНЦИОННОЕ ОБУЧЕНИЕ

Учебное пособие

Иркутск
Издательство БГУ
2017

УДК 519.863(075.8)
ББК 22.18я7
А42

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Байкальского государственного университета

Рецензенты канд. физ.-мат. наук, доц. Н.В. Антипина
канд. физ.-мат. наук, доц. О.А. Шилина

Аксенюшкина Е.В.
А42 Методы оптимальных решений: дистанционное обучение [Электронный ресурс] : учеб. пособие. – Иркутск : Изд-во БГУ, 2017. – 104 с. – Режим доступа: http://lib-catalog.isea.ru.

В учебном пособии кратко рассмотрены основные методы оптимальных решений, приведены математические рекомендации по построению моделей различных экономических задач, показаны методы их решения, в том числе с помощью *MS Excel*. Предложены варианты тестов или задачи для самостоятельного решения по каждой теме.

Предназначается студентам экономических специальностей, обучающимся дистанционно.

УДК 519.863(075.8)
ББК 22.18я7

Оглавление

Линейное программирование. Моделирование в экономике

Для исследования различных экономических ситуаций экономисты используют их упрощенные формальные описания, называемые экономическими моделями. Требования к модели противоречивы. Согласно высказыванию академика Ю.И. Неймарка «модель должна быть простой, но не проще, чем это возможно». Это означает, что с одной стороны, она должна быть достаточно полной, то есть в ней должны учитываться все важные факты, от которых существенно зависит принятие правильного решения в той или иной экономической ситуации. С другой стороны, модель должна быть достаточно простой для того, чтобы можно было увидеть связь между входящими в нее параметрами. При моделировании можно пренебрегать различными условиями, если известно, как это может отразиться на конечном результате, поскольку множество мелких и второстепенных факторов может существенно усложнять получение результата. Одним словом, искусство составлять математические модели есть именно *искусство*, и опыт в этом деле приобретается постепенно.

Важнейшим понятием при математическом моделировании является понятие *адекватности модели*, то есть соответствия модели моделируемому объекту или процессу. Это понятие является условным, так как естественно, что полного соответствия математической модели и реального экономического процесс быть не может. Поэтому для того, чтобы полученная модель, как можно ближе была приближена, к той или иной ситуации, или как можно более полно описывала то или иной объект, весь процесс моделирования можно разбить на этапы.

1. Постановка экономической проблемы. На этом этапе очень важно правильно сформулировать цель исследования, так как в зависимости от этого выбирается дальнейшее построение модели. Необходимо достаточно точно описать свойства и особенности рассматриваемой ситуации или процесса. На этом шаге идет сбор всей нужной информации для перехода к построению математической модели.

2. Построение экономической модели. Это этап формализации экономической проблемы, то есть выражение ее в виде конкретных математических зависимостей (функций, уравнений, неравенств и др.). Построение моделей в свою очередь подразделяется на несколько стадий. Определение управляющих переменных, изменяя значения, которых можно получить решение задачи, то есть достигнуть поставленной цели. На второй стадии построения модели формируется числовой критерий, который описывает основную цель, рассматриваемого экономического процесса. Его называют критерий качества управляющих переменных, или целевой функцией. В процессе моделирования, так

же формализуют все условия, которым должны удовлетворять эти переменные. Другими словами, строят допустимое множество.

После построения модели происходит поиск необходимого алгоритма численного решения задачи или программы на ЭВМ, которая будет использоваться для проведения расчетов. Изучение поведения модели большой размерности при различных условиях, возможно, проводить благодаря высокому быстродействию современных ЭВМ, а для многих моделей такое исследование является единственным. После получения решения построенной задачи решается важнейший вопрос о правильности и полноте результатов моделирования и применимости их как в практической деятельности, так и в целях усовершенствования модели.

Одними из наиболее распространенных моделей являются *оптимизационные*, которые в теории рыночной экономики присутствует в основном на микроуровне (максимизация полезности потребителем или прибыли фирмой); на макроуровне результатом рационального выбора поведения экономическими субъектами оказывается некоторое состояние равновесия. Отличительными признаками оптимизационных моделей являются:

– наличие одного или нескольких критериев оптимальности (наиболее типичными критериями в экономических задачах являются: максимум дохода или прибыли, минимум издержек, минимальное время для проведения технологических операций и т.д.),

– система ограничений, которая формируется, исходя из содержательного смысла задачи, и представляет собой систему уравнений или неравенств.

Цель создания любой модели заключается в стремлении понять сложившуюся экономическую ситуацию, а также преодолеть проблемы, связанные с ее необычной сложностью. Экономические решения относятся к решениям, последствия которых мы рассматриваем в категориях прибылей и убытков. Поэтому до принятия решения приходится анализировать ситуацию, определять критерий выбора и искать оптимальные решения. Г. Вагнер перечисляет в своей работе следующие стадии анализа, которые могут считаться стандартными при проведении полного исследования экономической ситуации:

– формализация исходной проблемы;
– построение математической модели;
– математическое решение задачи;
– проверка результатов и уточнение модели;
– интерпретация полученных результатов.

С момента выделения этих стадий прошло уже много лет, но предложенная Г. Вагнером схема все еще остается актуальной. Ее наиболее существенным элементом считается решение задачи, сформулированной по результатам анализа проблемы. Важным аспектом этого этапа является анализ чувствительно-

сти полученного решения. Это подразумевает получение дополнительной информации о поведении оптимального решения при изменении некоторых параметров модели. Анализ чувствительности особенно необходим, когда невозможно оценить параметры модели. В этом случае важно изучить поведение оптимального решения в окрестности первоначальных оценок параметров модели. Чаще всего для решения оптимизационных задач необходимо применять компьютеры, поэтому огромное влияние на развитие методов решения оказывает прогресс в информатике.

Практическими задачами экономико-математического моделирования являются, во-первых, анализ экономических объектов и процессов; во-вторых, экономическое прогнозирование, предвидение развития экономических процессов; в-третьих, выработка управленческих решений на всех уровнях хозяйственной иерархии. Следует, однако, иметь в виду, что далеко не во всех случаях данные, полученные в результате экономико-математического моделирования, могут использоваться непосредственно, как готовые управленческие решения. Они скорее могут быть представлены как «консультирующие» средства. Принятие управленческих решений остается за человеком. Таким образом, экономико-математическое моделирование является лишь одним из компонентов (пусть очень важным) в процессе планирования и управления экономическими процессами.

Рассмотрим математическую постановку общей задачи линейного программирования.

Найти максимум (или минимум) линейной функции

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max \ (\min), \tag{1}$$

от n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, удовлетворяющих m линейным ограничениям в форме равенств или неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le (=, \ge)\, b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le (=, \ge)\, b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le (=, \ge)\, b_m. \end{cases} \tag{2}$$

Часто в экономических задачах отдельно записываются условия неотрицательности переменных, обусловленные реальной сущностью экономических показателей

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1, 2, ..., n. \tag{3}$$

Функция $f(x)$ носит название *целевой функции*. Её коэффициенты c_j образуют вектор $c = (c_1, c_2, ..., c_n)$, называемый *целевым вектором*.

Любой вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, координаты которого удовлетворяют условиям (2), (3), называется *допустимым планом (допустимым вектором,*

допустимой точкой) задачи линейного программирования. Все они образуют множество X допустимых планов задачи.

Допустимы план $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in X$, доставляющий целевой функции $f(x)$ наибольшее (или наименьшее) значение, называется *оптимальным планом* задачи линейного программирования.

Ограничения (2) будем называть *основными ограничениями*, правая их часть – вектор $b = (b_1, b_2, ..., b_m)$ – называется *вектором ограничений.* Коэффициенты левых частей основных ограничений составляют матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, которую мы будем называть *матрицей условий или технологической матрицей*.

С учетом введенных обозначений задачу (1) – (3) можно записать в компактной *векторно-матричной записи:*

$$f(x) = \langle c, x \rangle \to \max(\min),\ Ax \le (=, \ge) b, \quad x \ge 0,$$

где выражение $\langle c, x \rangle$ означает скалярное произведение векторов c и x, которые должны быть записаны в форме вектор-столбцов.

Для того чтобы к решению конкретной задачи можно было применять методы линейного программирования, надо построить ее математическую модель. Напомним, что построение модели включает три этапа:

1. Определение величин (переменных), которые нужно найти в задаче.

2. Определение цели решения и построение линейной целевой функции, наибольшему или наименьшему значению которой соответствует достижение цели.

3. Описание ограничений на переменные, вытекающих из условий задачи с использованием линейных равенств и (или) неравенств.

Пример 1.

Частный инвестор намерен вложить 500 тыс. р. в различные ценные бумаги. После консультаций со специалистами фондового рынка он отобрал три типа акций и два типа государственных облигаций. Часть денег предполагается положить на срочный вклад в банк.

Вложения	*Доход, %*	*Риск*
Акции A	15	высокий
Акции B	12	средний
Акции C	9	низкий
Долгосрочные облигации	11	–
Краткосрочные облигации	8	–
Срочный вклад	6	–

Имея в виду качественные соображения диверсификации портфеля и не формализуемые личные предпочтения, инвестор выдвигает следующие требования к портфелю ценных бумаг:

1) все 500 тыс. р. должны быть инвестированы;

2) по крайней мере 100 тыс. р. должны быть на срочном вкладе в банке;

3) не меньше 25 % средств, инвестированных в акции, должны быть вложены в акции с низким риском;

4) в облигации нужно инвестировать по крайней мере столько же, сколько в акции;

5) не более чем 125 тыс. р. должно быть вложено в бумаги с доходом менее 10 %.

Определить портфель бумаг инвестора, удовлетворяющий всем требованиям и максимизирующий годовой доход от вложенных денег.

Построим математическую модель задачи. Для этого надо определить переменные задачи, целевую функцию и ограничения, которым удовлетворяют переменные.

Пусть x_j, $j = 1, 2, ..., 6$ – средства, которые планируется вложить в акции A, B, C, долгосрочные и краткосрочные облигации и срочный вклад соответственно *(тыс. р.)*. Тогда целевая функция, выражающая доход от вложенных инвестиций, строится следующим образом: если x_1 – вложенный капитал в акции A, то через год с учетом процентной ставки наращенная сумма составит $x_1 + 0{,}15x_1 = 1{,}15x_1$. Следовательно, доход от вложенных средств в акции A равен $0{,}15x_1$. Рассуждая аналогично для других вложений, суммарный доход формально можно записать так: $0{,}15x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}09x_3 + 0{,}11x_4 + 0{,}08x_5 + 0{,}06x_6$. Именно его, согласно условию задачи, необходимо максимизировать. Ограничения на инвестиции согласно условию задачи и введенным обозначениям по проектам будут выглядеть следующим образом:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 500,$$
$$x_6 \geq 100,$$
$$0{,}25(x_1 + x_2 + x_3) \leq x_3,$$
$$x_4 + x_5 \geq x_1 + x_2 + x_3,$$
$$x_3 + x_5 \leq 125.$$

Согласно экономическому смыслу, на каждую переменную необходимо наложить условие неотрицательности: $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, ..., 6$. Перенеся все переменные в левые части ограничений, после приведения подобных членов получаем полную математическую модель задачи:

$$f(x) = 0{,}15x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}09x_3 + 0{,}11x_4 + 0{,}08x_5 + 0{,}06x_6 \to \max,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 500,$$
$$x_6 \geq 100,$$
$$0,25x_1 + 0,25x_2 - 0,75x_3 \leq 0,$$
$$-x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \geq 0,$$
$$x_3 + x_5 \leq 125,$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, ..., 6.$$

Пример 2.

Издательская фирма выпускает журналы, рассчитанные на массовую аудиторию, и теперь намеревается выпускать новый красочный журнал. Для этого фирма собирается провести рекламную компанию, используя рекламные ролики на телевидении и на радио, объявления в газетах, а также прямую адресную рассылку рекламных буклетов населению. Из опыта проведения рекламных компаний своей прежней журнальной продукции руководству фирмы известно, что вложения в рекламу денежных средств в размере 1 ден. ед. приводит к увеличению прибыли от реализации печатной продукции:

– в газетах – на 0,7 ден. ед.,
– на радио – на 0,9 ден. ед.,
– посредством прямой рассылки – на 0,5 ден. ед.,
– на телевидении – на 1,2 ден. ед.

Фирма ассигнует на проведение всей рекламной компании не более 350 тыс. ден. ед. Из них на рекламу на радио, телевидение и посредством прямой рассылки фирма направляет сумму, не превышающую 60 % от вложенных средств, на рекламу посредством прямой рассылки и на телевидении – не более 35 % от вложенных средств, а на рекламу на телевидении – не более 100 тыс. ден. ед.

Определить, сколько денежных средств следует ассигновать фирме на каждый вид рекламы, чтобы прогнозируемая прибыль от рекламной компании была максимальной.

Построим математическую модель задачи. Для этого надо определить переменные задачи, целевую функцию и ограничения, которым удовлетворяют переменные.

Пусть x_j, $j = 1, 2, 3, 4$ – объемы денежных средств вкладываемых в рекламу в газетах, на радио, посредством прямой рассылки и на телевидении соответственно *(тыс. р.)*. Тогда целевая функция представляет собой суммарную прибыль, ожидаемую после проведения рекламной компании $0,7x_1 + 0,9x_2 + 0,05x_3 + 1,2x_4$. Именно ее, согласно условию задачи, необходимо максимизировать.

Ограничения устанавливают предельный объем денежных средств, которая фирма направляет:

– на всю рекламную компанию

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 350;$$

– на рекламу на радио, прямую рассылку и на телевидение

$$x_2 + x_3 + x_4 \le 0{,}6(x_1 + x_2 + x_3 + x_4);$$

– на рекламу по прямой рассылке и на телевидение

$$x_3 + x_4 \le 0{,}35(x_1 + x_2 + x_3 + x_4);$$

– на рекламу только на телевидении

$$x_4 \le 100.$$

К этим ограничениям необходимо еще добавить естественные условия, заключающиеся в том, что объемы средств, идущие на все виды рекламы, не могут быть отрицательными. Перенеся все переменные в левые части ограничений, после приведения подобных членов получаем полную математическую модель задачи:

$$f(x) = 0{,}7x_1 + 0{,}9x_2 + 0{,}05x_3 + 1{,}2x_4 \to \max,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 350,$$

$$-0{,}6x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}4x_3 + 0{,}4x_4 \le 0,$$

$$-0{,}35x_1 - 0{,}35x_2 + 0{,}65x_3 + 0{,}65x_4 \le 0,$$

$$x_4 \le 100,$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Тест № 1 по теме «Линейное программирование. Моделирование в экономике»

1. На велосипедном заводе выпускают гоночные и дорожные велосипеды. Производство устроено так, что на один гоночный велосипед уходит 2 литра краски, а на один дорожный 1 литр краски. На заводе в наличии имеется не более 700 литров краски ежедневно. Склад может принять не более 500 велосипедов в день. Сколько нужно выпускать в день гоночных и дорожных велосипедов, для того чтобы завод получал максимальную прибыль, если один гоночный велосипед стоит 15 дол., а дорожный 10 дол.?

Определите сколько переменных должно быть в математической модели.

a) 2;

b) 3;

c) 4.

2. На велосипедном заводе выпускают гоночные и дорожные велосипеды. Производство устроено так, что на один гоночный велосипед уходит 2 литра краски, а на один дорожный 1 литр краски. На заводе в наличии имеется не более 700 литров краски ежедневно. Склад может принять не более 500 велосипедов в день. Сколько нужно выпускать в день гоночных и дорожных велосипе-

дов, для того чтобы завод получал максимальную прибыль, если один гоночный велосипед стоит 15 дол., а дорожный 10 дол.?

Определите сколько основных ограничений должно быть в математической модели.

a) 2;

b) 3;

c) 4.

3. Озеро можно заселить двумя видами рыб *A* и *B*. Средняя масса рыбы равна 2 кг для вида *A* и 1 кг для вида *B*. В озере имеется два вида пищи: *P1* и *P2*. Средние потребности одной рыбы вида *A* составляют 1 ед. корма *P1* и 3 ед. корма *P2* в день. Аналогично потребности для рыбы вида *B* составляют 2 ед. *P1* и 1 ед. *P2*. Ежедневный запас пищи поддерживается на уровне не более 500 ед. *P1* и не более 900 ед. *P2*. Как следует заселить озеро рыбами, чтобы максимизировать общую массу рыб?

Если в качестве переменных выбрать количество рыб *A* и *B*, которое следует заселить в озеро, то целевая функция будет иметь вид…

a) $f(x) = 2x_1 + x_2 \to \max$;

b) $f(x) = 3x_1 + x_2 \to \max$;

c) $f(x) = x_1 + x_2 \to \max$.

4. Озеро можно заселить двумя видами рыб *A* и *B*. Средняя масса рыбы равна 2 кг для вида *A* и 1 кг для вида *B*. В озере имеется два вида пищи: *P1* и *P2*. Средние потребности одной рыбы вида *A* составляют 1 ед. корма *P1* и 3 ед. корма *P2* в день. Аналогично потребности для рыбы вида *B* составляют 2 ед. *P1* и 1 ед. *P2*. Ежедневный запас пищи поддерживается на уровне не более 500 ед. *P1* и не более 900 ед. *P2*. Как следует заселить озеро рыбами, чтобы максимизировать общую массу рыб?

Если в качестве переменных выбрать количество рыб *A* и *B*, которое следует заселить в озеро, то основные ограничения будут иметь вид…

a) $x_1 + 2x_2 \le 500$,

$3x_1 + x_2 \le 900$;

b) $x_1 + 2x_2 = 500$,

$3x_1 + x_2 = 900$;

c) $x_1 + 3x_2 \le 500$,

$2x_1 + x_2 \le 900$.

5. Туристическая фирма в летний сезон обслуживает туристов и располагает флотилией из двух типов судов, характеристики которых представлены в таблице.

Показатели	*Судно*	
	«Ассоль»	*«Людмила»*
Горючее (тонн)	2	1
Экипаж (десятков)	4	3

В месяц выделяется не более 80 т. горючего. Потребность в рабочей силе не превышает 180 десятков человек.

Определите необходимое количество судов «Ассоль» и «Людмила» во флотилии, чтобы обеспечить максимальный доход, если доход от эксплуатации одного судна «Ассоль» и судна «Людмила» составляет 20 и 40 ден. ед. соответственно.

Если в качестве переменных выбрать количество судов «Ассоль» и «Людмила» во флотилии, то ограничение характеризующее расход горючего будет иметь вид…

a) $2x_1 + x_2 \le 80$;

b) $x_1 + x_2 \le 80$;

c) $40x_1 + 30x_2 \le 1800$.

6. Туристическая фирма в летний сезон обслуживает туристов и располагает флотилией из двух типов судов, характеристики которых представлены в таблице.

Показатели	*Судно*	
	«Ассоль»	*«Людмила»*
Горючее (тонн)	2	1
Экипаж (десятков)	4	3

В месяц выделяется не более 80 т. горючего. Потребность в рабочей силе не превышает 180 десятков человек.

Определите необходимое количество судов «Ассоль» и «Людмила» во флотилии, чтобы обеспечить максимальный доход, если доход от эксплуатации одного судна «Ассоль» и судна «Людмила» составляет 20 и 40 ден. ед. соответственно.

Если в качестве переменных выбрать количество судов «Ассоль» и «Людмила» во флотилии, то ограничение характеризующее количество экипажей будет иметь вид…

a) $40x_1 + 30x_2 \le 1800$;

b) $x_1 + x_2 \le 1800$;

c) $2x_1 + x_2 \le 80$.

7. Пусть x_1 – количество акций акционерного общества *A*, а x_2 – количество акций акционерного общества *B*. Тогда условие: количество акций общества *B* не должно превышать количество акций общества *A* более, чем на 10 шт., будет иметь вид…

a) $x_2 - x_1 \le 10$;

b) $x_1 - x_2 \le 10$;

c) $x_1 + x_2 \ge 10$.

8. Фирма имеет возможность рекламировать свою продукцию, используя местные радио- и телевизионную сети. Пусть x_1 – ден. ед. вложенные в рекламу на радио, а x_2 – ден. ед. вложенные в рекламу на телевидении. Каждая минута радиорекламы обходится в 5 ден. ед., а каждая минута телерекламы - в 100 ден. ед. Тогда условие, фирма хотела бы использовать радиосеть в два раза чаще, чем сеть телевидения будет иметь вид…

a) $10x_1 - x_2 = 0$;

b) $x_1 = 2x_2$;

c) $5x_1 - 2 \cdot 100x_2 = 0$.

9. Турфирма организует чартерный тур на курорт. В стоимость путевки входят стоимость авиаперелета «туда и обратно», плата за проживание в отеле, питание и экскурсии. В зависимости от предоставляемого сервиса туры подразделяются на две категории: *A* – люкс и *B* – стандарт. Цены путевок и издержки фирмы на одного клиента приведены в таблице.

Категория тура	Цена путевки (дол.)	Стоимость номера в отеле (дол.)	Питание и услуги (дол.)
A	1000	400	475
B	700	220	250

Фирме требуется решить, какое количество путевок каждой из категорий предложить клиентам с тем, чтобы максимизировать свою прибыль.

Пусть x_1 – количество путевок категории *A*, а x_2 – количество путевок категории *B*. Тогда целевая функция будет иметь вид…

a) $f(x) = 125x_1 + 230x_2$;

b) $f(x) = 1850x_1 + 1170x_2$;

c) $f(x) = 1000x_1 + 700x_2$.

10. На звероферме могут выращиваться песцы и черно-белые лисы. Для их питания используются два вида кормов. В таблице приведены нормы расхода кормов, их ресурс в расчете на день, а также прибыль от реализации одной шкурки каждого зверька.

Вид корма	Нормы расхода кормов (кг/день)		Запас корма
	Песец	Лиса	
I	5	4	84
II	3	6	72
Прибыль	7	9	

Определите, сколько и каких зверьков следует выращивать на ферме, чтобы прибыль от реализации шкурок была наибольшей.

Математическая модель задачи имеет вид…

a) $f(x) = 7x_1 + 9x_2 \to \max$,

$5x_1 + 4x_2 \le 84$,

$3x_1 + 6x_2 \le 72$,

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$;

b) $f(x) = x_1 + x_2 \to \max$,

$5x_1 + 4x_2 \le 84$,

$3x_1 + 6x_2 \le 72$,

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$;

c) $f(x) = 84x_1 + 72x_2 \to \max$,

$5x_1 + 3x_2 \le 7$,

$4x_1 + 6x_2 \le 9$,

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$.

Стандартная и каноническая задачи линейного программирования

В теории линейного программирования особо выделяют два вида задач – стандартную и каноническую задачи.

Стандартная задача линейного программирования.

Найти вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, доставляющий максимальное значение (максимум) линейной функции

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

и удовлетворяющий линейным ограничениям типа неравенства

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \quad ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

и условиям неотрицательности

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ ...,\ x_n \ge 0.$$

В стандартной задаче соотношение между числом ограничений m и числом переменных n может быть произвольным, поскольку любому неравенству удовлетворяет бесконечное множество точек.

Векторно-матричная запись стандартной задачи линейного программирования имеет вид

$$f(x) = < c, x > \to \max,$$

$$Ax \le b, \qquad x \ge 0.$$

Каноническая задача линейного программирования.

Найти вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, максимизирующий функцию

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max,$$

и удовлетворяющий линейным ограничениям типа равенства

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

и условиям неотрицательности

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ ...,\ x_n \ge 0.$$

Отметим отличительную особенность канонической задачи – наличие ограничений типа равенства (помимо условий неотрицательности).

Векторно-матричная запись канонической задачи имеет вид

$$f(x) = < c, x > \to \max,$$

$$Ax = b, \qquad x \ge 0.$$

Эквивалентные преобразования задач линейного программирования

Конкретная задача линейного программирования, в зависимости от экономического содержания, может иметь ограничения как типа равенств, так и неравенств любого смысла, а целевая функция может подлежать максимизации или минимизации. Покажем, что, тем не менее, любую задачу можно привести

как к канонической, так и к стандартной форме с помощью эквивалентных преобразований.

Изучим, в первую очередь, взаимосвязь между стандартной и канонической задачами. Рассмотрим основные ограничения стандартной задачи

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i, \qquad i = 1, 2, ..., m.$$

Введем вспомогательные переменные

$$s_i = b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - ... - a_{in}x_n, \qquad i = 1, 2, ..., m.$$

Тогда предыдущие неравенства эквиваленты условиям неотрицательности $s_i \ge 0, \quad i = 1, 2, ..., m$.

Следовательно, основные ограничения стандартной задачи могут быть записаны в форме

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n + s_i = b_i, \qquad i = 1, 2, ..., m,$$

с условием неотрицательности вспомогательных переменных $s_i \ge 0, \quad i = 1, 2, ..., m$.

В результате стандартная задача с переменными $x_1, x_2, ..., x_n$ становится канонической относительно переменных $x_1, x_2, ..., x_n, s_1, s_2, ..., s_m$

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max,$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + s_1 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + s_2 = b_2,$$
$$.....$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + s_m = b_m,$$
$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \ ..., \ x_n \ge 0,$$
$$s_1 \ge 0, \ s_2 \ge 0, \ ..., \ s_m \ge 0.$$

При этом вспомогательные переменные $s_1, s_2, ..., s_m$ называются *дополнительными*. Отметим, что они не входят в целевую функцию, т.е. $c_{n+1} = c_{n+2} = ... = c_{n+m} = 0$.

Легко сообразить, что неравенство вида $a_kx_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \ge b_k$ можно свести к равенству, вычитая из левой части неотрицательную дополнительную переменную $s_k \ge 0$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n - s_k = b_k.$$

Если расширенный вектор $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, s_1^*, s_2^*, ..., s_m^*)$ является решением полученной канонической задачи, то вектор $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ – оптимальный план исходной стандартной задачи. При этом значения целевых функций совпадают.

Таким образом, при переходе от стандартной задачи линейного программирования к канонической задаче число переменных увеличивается на число основных ограничений исходной стандартной задачи.

Обратный переход от канонической задачи к стандартной очевиден, поскольку каждое основное ограничение канонической задачи

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = b_k$$

можно представить в виде двух неравенств

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \le b_k,$$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \ge b_k,$$

последнее из которых следует переписать в виде

$$-a_{k1}x_1 - a_{k2}x_2 - ... - a_{kn}x_n \le -b_k.$$

Итак, при переходе от канонической задачи линейного программирования к стандартной число основных ограничений увеличивается в два раза.

В заключение решим вопрос о взаимосвязи между операциями на минимум и максимум. Пусть дана задача минимизации

$$f(x) \to \min, \qquad x \in X$$

с решением x^*. Это значит, что выполняется неравенство $f(x^*) \le f(x)$, $x \in X$. Перепишем его в виде $-f(x^*) \ge -f(x)$, $x \in X$. Полученное неравенство означает, что x^* является решением задачи

$$-f(x) \to \max, \qquad x \in X.$$

Таким образом, всякая задача на минимум сводится к задаче на максимум путем изменения знака целевой функции. Аналогично проводится переход от max к min.

Пример 1.

Требуется привести к стандартной и канонической форме следующую задачу

$$f(x) = 4x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 \to \min,$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 \ge -5,$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 \ge 1,$$

$$-2x_1 - x_2 - x_4 - x_5 \le 3.$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1, 2, ..., 5.$$

Решение. Для приведения задачи к стандартной форме умножим целевую функцию и первые два ограничения на “–1”. Получим

$$-f(x) = -4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 5x_5 \to \max,$$

$$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 \le 5,$$

$$-2x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 \le -1,$$

$$-2x_1 - x_2 - x_4 - x_5 \le 3.$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1, 2, ..., 5.$$

Чтобы из исходной задачи получить каноническую, нужно целевую функцию умножить на “–1”, из левых частей первых двух неравенств вычесть

новые неотрицательные переменные s_1, s_2, а в левую часть третьего ограничения добавить неотрицательную переменную s_3

$$
\begin{gathered}
-f(x) = -4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 5x_5 \to \max, \\
x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 - s_1 = -5, \\
2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 - s_2 = 1, \\
-2x_1 - x_2 - x_4 - x_5 + s_3 = 3. \\
x_j \ge 0, \qquad j = 1, 2, ..., 5, \quad s_i \ge 0, \ i = 1, 2, 3.
\end{gathered}
$$

Вывод: Все типа задач линейного программирования эквиваленты между собой с точностью до рассмотренных преобразований.

Экономическая интерпретация стандартной и канонической задач линейного программирования

Предположим, что некоторое предприятие производит n различных типов товаров (продуктов) $P_1, P_2, ..., P_n$. Для организации производственного процесса предприятие имеет m видов ресурсов $R_1, R_2, ..., R_m$ в количестве $b_1, b_2, ..., b_m$ соответственно.

Введем следующие характеристики затрат и прибыли: a_{ij} – количество ресурса R_i, необходимое для производства единицы продукта P_j (норма расхода ресурса на единицу продукции), c_j – прибыль от реализации единицы продукта P_j, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$.

В этих условиях необходимо составить план производства (план выпуска товаров) на определенный период так, чтобы обеспечить получение максимальной прибыли при соблюдении ограничений на количество ресурсов.

Построим математическую модель, отражающую эти цели.

Введем переменные x_j – количество продукта P_j, которое планируется к выпуску, $j = 1, 2, ..., n$. Тогда план производства может быть описан вектором $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, компоненты которого указывают планируемый выпуск каждого продукта.

В этих обозначениях затраты ресурса R_i на реализацию плана $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ выражаются суммой

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \qquad i = 1, 2, ..., m.$$

Требование уложиться в лимит ресурсов приводит к неравенствам

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, 2, ..., m \qquad (1)$$

Кроме того, по смыслу переменных x_j должны выполняться условия неотрицательности

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1, 2, ..., n. \qquad (2)$$

Прибыль от реализации x определяется суммой

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (3)$$

В результате приходим к математической формулировке задачи оптимального планирования: среди всех векторов-планов $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющих системе (1), (2), найти вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ (оптимальный план производства), на котором функция (3) принимает максимальное значение.

Соотношения (1) – (3) составляют математическую модель экономической задачи планирования производства.

Отметим, что задача оптимального планирования производства является стандартной задачей линейного программирования.

Приведем теперь эту задачу к канонической форме, добавив в правую часть каждого i-го неравенства неотрицательную переменную s_i, $i = 1, 2, ..., m$

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + ... + a_{in} x_n + s_i = b_i.$$

Выражая отсюда s_i, видим, что она равна разности между запасом соответствующего ресурса и его расходом. Следовательно, дополнительная переменная s_i может быть интерпретирована как величина остатка ресурса R_i после реализации производственной программы.

Таким образом, мы осуществили переход от стандартной задачи к канонической, которая в данном случае является более информативной. В этой связи становится понятным, что необходимо уметь решать как стандартную задачу, представляющую самостоятельный интерес, так и каноническую.

Тест № 2 по теме «Преобразование задач линейного программирования»

1. Допустимым планом задачи является…

a) вектор, удовлетворяющий всем ограничениям задачи;

b) вектор, удовлетворяющий некоторым ограничениям задачи;

c) вектор, удовлетворяющий основным ограничениям задачи.

2. Допустимым планом задачи линейного программирования

$$f(x) = 2x_1 + x_2 \to \max,$$
$$4x_1 + x_2 \le 20,$$
$$x_2 - x_1 \le 10,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$$

является…

a) (2; 12);

b) (0; 20);

c) (–10; 0).

3. Какой знак используется в основных ограничениях в стандартной задаче линейного программирования…

a) $\le$;

b) $\ge$;

c) $=$.

4. Какой вид имеют основные ограничения в канонической задаче линейного программирования…

a) $2x_1 - 4x_2 = 8$,
$x_1 - 3x_2 = 15$;

b) $2x_1 - 4x_2 \le 8$,
$x_1 - 3x_2 \le 15$;

c) $2x_1 - 4x_2 \le 8$,
$x_1 - 3x_2 \ge 15$.

5. Задача

$$f(x) = 4x_1 + 5x_2 \to \max,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 10,$$
$$2x_1 - x_2 \le 8,$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 6,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$$

записана в …

a) стандартной постановке;

b) канонической остановке;

c) общей постановке.

6. При переходе от стандартной задачи линейного программирования к канонической, количество переменных…

a) увеличивается на число основных ограничений стандартной задачи;

b) увеличивается в два раза;
c) не изменится.

7. При переходе от канонической задачи линейного программирования к стандартной, число основных ограничений…
a) увеличивается в два раза;
b) увеличивается на число переменных стандартной задачи;
c) не изменится.

8. Сколько переменных надо добавить при сведении задачи линейного программирования к каноническому виду

$$f(x) = -2x_1 + 4x_2 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 = 5,$$
$$2x_1 - x_2 \le 3,$$
$$x_1 - 3x_2 \le 4,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$$

a) 2;
b) 1;
c) 3.

9. При сведении общей задачи линейного программирования

$$f(x) = 3x_1 + x_2 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 = 2,$$
$$x_1 - 3x_2 \le -4,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

к стандартной, получим…

a) $f(x) = 3x_1 + x_2 \to \max,$
$$x_1 + x_2 \le 2,$$
$$-x_1 - x_2 \le -2,$$
$$x_1 - 3x_2 \le -4,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$$

b) $f(x) = 3x_1 + x_2 \to \max,$
$$x_1 + x_2 \le 2,$$
$$x_1 - 3x_2 \le -4,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$$

c) $f(x) = 3x_1 + x_2 \to \max,$
$$x_1 + x_2 = 2,$$

$$x_1 - 3x_2 + S_1 = -4,$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad S_1 \geq 0.$$

10. Оптимальным решением задачи на максимум называется…

a) допустимый план, доставляющий максимальное значение целевой функции;

b) вектор, удовлетворяющий всем ограничениям задачи;

c) вектор, доставляющий максимальное значение функции.

Графический метод решения задач линейного программирования

Рассмотрим стандартную задачу линейного программирования с двумя переменными

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max, \tag{1}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1,$$
$$\dots \tag{2}$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \tag{3}$$

Охарактеризуем допустимое множество на плоскости с координатными осями x_1 и x_2. Каждое из неравенств (2), (3) определяет полуплоскость, границей которой является либо прямая

$$p_i = \{x = (x_1, x_2): \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i\}, \quad i = 1, ..., m,$$

либо координатная ось $x_j = 0, \quad j = 1, 2$.

Множество допустимых планов задачи (1), (2), (3) представляет собой, таким образом, пересечение конечного числа $(m+2)$ полуплоскостей. Такое множество называют *выпуклым многоугольным множеством*. Если оно ограничено, то получаем *выпуклый многоугольник*. При этом выпуклость понимается в том смысле, что множество располагается по одну сторону от каждой прямой, его образующей.

Точки пересечения прямых, образующих границу допустимого множества называют *угловыми точками* или вершинами множества.

Изучим поведение целевой функции в задаче (1), (2), (3).

Линией уровня функции $f(x)$ называется множество точек x, в которых она сохраняет какое-либо постоянное значение $f(x) = h$, где h – некоторое число.

Для линейной функции (1) линиями уровня являются прямые $p(h)=\{x:\ c_1x_1+c_2x_2=h\}$, перпендикулярные вектору $c=(c_1,c_2)$.

Отметим одно свойство линейной функции $f(x)=<c,x>$ по части возрастания: при перемещении (движении) из любой точки x в направлении вектора c функция $f(x)=<c,x>$ возрастает (вектор c задает направление возрастания функции $f(x)=<c,x>$ в любой точке x). Аналогично, вектор $(-c)$ задает направление убывания функции $f(x)=<c,x>$ в любой точке x.

Таким образом: *при увеличении параметра* h *линии уровня функции* $f(x)$ *сдвигаются в направлении вектора* c.

Следовательно, если ищется максимальное значение задачи, то необходимо сдвигать линии уровня целевой функции в направлении целевого вектора до пересечения с крайней угловой точкой допустимого множества, после которой линии уровня выйдут за пределы множества допустимых точек. В этой точки и будет достигаться максимальное значение целевой функции.

Аналогичные рассуждения позволяют найти минимальное значение целевой функции, при движении линий уровня в противоположном направлении целевого вектора.

Замечание. Из геометрических соображений понятно, что решение задачи линейного программирования является граничной точкой допустимого множества. Более того, когда задача имеет решение, то существует угловая точка множества, которая является оптимальной.

Графический метод часто используется при решении задач, в которых только две неизвестных величины. Разберем его на следующем примере.

Пример 1.

Небольшая фабрика изготовляет два вида красок: для внутренних (I) и наружных (II) работ. Продукция обоих видов поступает в оптовую продажу. Для производства красок используется два исходных продукта – А и В. Максимально возможные суточные запасы этих продуктов составляют 6 и 8 т., соответственно. На одну тонну краски I расходуется 2 т. продукта А и 1 т. продукта В. На одну тонну краски II расходуется 1 т. продукта А и 2 т. продукта В.

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску I никогда не превышает спроса на краску II более, чем на 1 т. Кроме того, установлено, что спрос на краску I никогда не превышает 2 т. в сутки. Оптовые цены одной тонны красок равны: 2 тыс. дол. для краски I и 3 тыс. дол. для краски II.

Какое количество краски каждого вида должна производить фабрика, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Решение. Построим математическую модель задачи. Для этого надо определить переменные задачи, целевую функцию и ограничения, которым удовлетворяют переменные.

Обозначим через x_1 и x_2 – планируемые объемы выпуска краски I и II вида соответственно. Целевая функция $f(x)$ будет выражать суммарный доход от реализации продукции, равный $2x_1 + 3x_2$ (тыс. дол.). Этот доход подлежит максимизации

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max.$$

Построим ограничения задачи, связанные с ограниченными запасами продуктов А и В. На производство краски I в количестве x_1 будет использовано $2x_1$ продукта А, а на производство краски II в объеме x_2 будет затрачено $1x_2$ того же продукта. Поскольку запас продукта А равен 6 т., то расход этого продукта на изготовление краски двух видов не может превышать этой величины: $2x_1 + x_2 \le 6$. Аналогично получим ограничение, связанное с запасом продукта В: $x_1 + 2x_2 \le 8$. Так как суточный спрос на краску I никогда не превышает спроса на краску II более, чем на 1 т, то получим следующее условие: $x_1 - x_2 \le 1$. Кроме того, условие о том, что спрос на краску I никогда не превышает 2 т. в сутки формирует еще одно неравенство: $x_1 \le 2$. Учитывая естественные условия неотрицательности объемов выпуска продукции, окончательно получим следующую задачу линейного программирования

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max,$$
$$2x_1 + x_2 \le 6,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 8,$$
$$x_1 - x_2 \le 1,$$
$$x_1 \le 2,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Решим задачу графически, для этого построим множество допустимых планов. Рассмотрим первое неравенство. Оно задает некоторую полуплоскость, расположенную по одну сторону от граничной прямой

$$p_1: \quad 2x_1 + x_2 = 6.$$

Построим эту прямую на плоскости с координатными осями x_1 и x_2. Для проведения прямой достаточно знать две ее точки. Проще всего найти точки пересечения прямой с осями координат. Полагая $x_1 = 0$, из уравнения прямой получим $x_2 = 6$, а при $x_2 = 0$ найдем $x_1 = 3$. Таким образом, прямая p_1 пройдет через точки (0, 6) и (3, 0). Чтобы определить, по какую сторону от прямой расположена искомая полуплоскость, достаточно подставить в неравенство $2x_1 + x_2 \le 6$ координаты любой точки плоскости. Если прямая не проходит через начало координат, то удобнее всего взять точку (0,0). Очевидно, что в этой точке неравенство строго выполняется ($2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 < 6$), значит, полуплоскость,

определяемая этим неравенством, лежит ниже p_1, включая в себя начало координат. Искомую полуплоскость отметим стрелкой.

Построим полуплоскость, задаваемую неравенством $x_1 + 2x_2 \le 8$. Для этого нанесем на координатную плоскость граничную прямую

$$p_2: \quad x_1 + 2x_2 = 8,$$

найдя ее точки пересечения с осями координат: (0, 4), (8, 0).

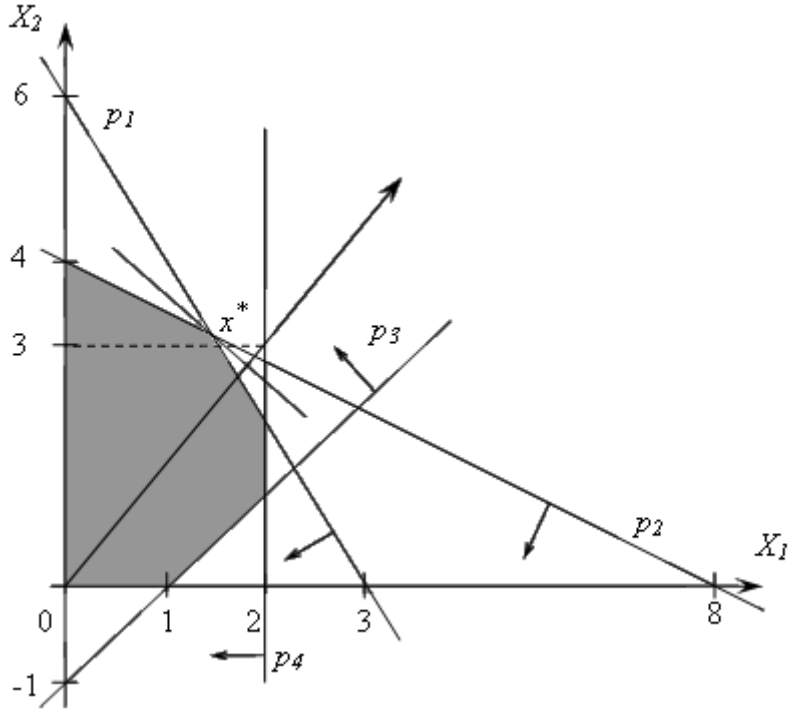
Подставляя координаты точки (0,0) в неравенство $x_1 + 2x_2 \le 8$ видим, что начало координат лежит в искомой полуплоскости $(1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 < 8)$, значит все точки, удовлетворяющие неравенству, расположены ниже прямой p_2. Отметим эту область стрелкой. Аналогично построим полуплоскости задаваемые неравенствами $x_1 - x_2 \le 1$ и $x_1 \le 2$, обозначив их границы через p_3 и p_4 соответственно.

Наконец, условия неотрицательности: $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$ задают все точки первой четверти.

Выделяя теперь все точки плоскости, удовлетворяющие всем ограничениям задачи, то есть расположенные одновременно во всех полуплоскостях, получаем множество допустимых планов X.

Построим линии уровня целевой функции $f(x) = 2x_1 + 3x_2$ в нашей задаче. Их уравнения будут иметь вид $2x_1 + 3x_2 = h$. Они задают семейство параллельных прямых, зависящих от параметра h. Все прямые перпендикулярны целевому вектору $c = (2, 3)$, составленному из коэффициентов целевой функции, поэтому для построения семейства линий уровня целевой функции достаточно построить ее целевой вектор, и провести несколько прямых, перпендикулярных этому вектору. Линии уровня будем проводить на множестве планов X, помня при этом, что при параллельном перемещении прямых в направлении целевого вектора $c = (2, 3)$ значение функции $f(x) = 2x_1 + 3x_2$ будет возрастать.

Поскольку в задаче оптимальный план должен доставлять целевой функции максимально возможное значение, то для решения задачи графически надо среди всех точек $x = (x_1, x_2)$ множества планов X найти такую точку $x^* = (x_1^*, x_2^*)$, через которую пройдет последняя линия уровня в направлении целевого вектора $c = (2, 3)$.



Из рисунка видно, что искомой точкой будет точка, лежащая на пересечении прямой p_1 и p_2. Найдем ее координаты из решения системы

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}.$$

Таким образом, оптимальный план задачи имеет вид $x^* = (4/3, 10/3)$. При этом максимальное значение целевой функции будет равно $f(x^*) = 38/3$. Таким образом, фабрика должна выпускать $4/3$ тонны краски для внутренних работ (I) и $10/3$ тонны краски для наружных работ (II), получая при этом доход $38/3$ тыс. долларов.

Тест № 3 по теме «Графический метод решения задач линейного программирования»

1. В задаче линейного программирования

$$f(x) = 12x_1 + 10x_2 \to \min,$$
$$4x_1 + 3x_2 \le 480,$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 360,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

какая из точек не является допустимой?

a) (70; 70);

b) (0; 100);

c) (100; 10).

2. Сколько угловых точек допустимого множества в задаче

$$f(x) = x_1 - x_2 \to \max,$$
$$x_1 - x_2 \le 20,$$
$$x_1 + 2x_2 \ge 4,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

a) 3;
b) 2;
c) 4.

3. Задачу линейного программирования можно решить графически…
a) если она имеет не более двух переменных;
b) если она имеет не более двух ограничений неравенств;
c) всегда.

4. Каков оптимальный план, если при решении задачи линейного программирования на максимум линия уровня при движении в направлении целевого вектора выходит из множества допустимых планов в точке пересечения прямых

$$3x_1 + x_2 = 6,$$
$$-2x_1 + x_2 = 1.$$

a) (1; 3);
b) (1; 2);
c) (3; 1).

5. Для изготовления изделий *A* и *B* склад может отпустить металла не более 80 кг, причем на одно изделие *A* расходуется 2 кг, а на одно изделие *B* расходуется 1 кг металла. Укажите план производства, при котором обеспечен наибольший доход, если изделий *A* требуется изготовить не более 30 шт., а изделий *B* – не более 40 шт., причем одно изделие *A* стоит 5 ден. ед., а одно изделие *B* стоит 3 ден. ед.

a) $x_A = 20, \quad x_B = 40$;
b) $x_A = 30, \quad x_B = 20$;
c) $x_A = 30, \quad x_B = 40$.

6. Множество допустимых планов в задаче линейного программирования имеет следующие вершины (48; 84), (0; 120), (0; 0), (90, 0). Чему равно максимальное значение целевой функции $f(x) = 4x_1 + 10x_2$?

a) 1200;
b) 1032;
c) 1600.

7. Целевой вектор указывает…
a) направление возрастания целевой функции;
b) направление убывание целевой функции;
c) в задаче на максимум – направление возрастание, в задаче на минимум – направление убывания целевой функции.

8. Максимальное значение функции $f(x) = 2x_1 - x_2$ на множестве

$$x_1 + x_2 \le 3,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

достигается в точке…
a) (3; 0);
b) (10; 0);
c) (0; 3).

9. Минимальное значение функции $f(x) = 2x_1 + 3x_2$ на множестве

$$2x_1 + x_2 \le 4,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 2$$

равно…
a) 6;
b) 0;
c) 9.

10. Максимальное значение функции $f(x) = x_1 + 3x_2$ на множестве

$$x_1 + x_2 \le 9,$$
$$x_1 \le 3,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

равно…
a) 27;
b) 36;
c) 21.

Двойственные задачи линейного программирования

С каждой задачей линейного программирования можно связать по определенному правилу другую задачу линейного программирования, которая называется двойственной. При этом исходную задачу называют прямой. Рассмотрение двойственной пары задач линейного программирования дает полезную дополнительную информацию о свойствах оптимального плана. Опишем способ построения двойственных задач и основные результаты теории двойственности.

Рассмотрим пример, показывающий, как в реальной ситуации могут возникать двойственные задачи линейного программирования.

Пример 1.

На кондитерской фабрике г. Покрова перед Новым годом возник вопрос: как поступить с остатками конфет после того, как были сформированы новогодние подарки? Существует две возможности: наладить из оставшихся конфет производство небольших новогодних подарков или продать их на другую кондитерскую фабрику?

Возможные варианты небольших подарочных наборов, их стоимость и товарные запасы представлены в таблице

Наименование конфет	***Вес конфет в наборе, кг***			***Запас конфет, кг***
	набор 1	***набор 2***	***набор 3***	
«Сникерс»	0,3	0,2	0,4	600
«Марс»	0,2	0,3	0,2	700
«Баунти»	0,2	0,1	0,1	500
Цена, р.	72	62	76	

Решение. При исследовании первой возможности (наладить выпуск небольших подарочных наборов конфет) возникает вопрос об оптимальном плане выпуска наборов. Поэтому введем следующие переменные для построения математической модели:

x_1 – количество подарочных наборов 1, планируемых к производству;

x_2 – количество подарочных наборов 2, планируемых к производству;

x_3 – количество подарочных наборов 3, планируемых к производству.

Целевая функция задачи представляет собой суммарный доход от реализации всех новогодних наборов. Доход от реализации одного набора первого вида составляет 72 р., если наборов этого вида будет составлено x_1 штук, то доход от реализации этого количества наборов будет равен произведению $72x_1$ р. Аналогично, доход от реализации наборов второго и третьего вида, выпущенных в количестве x_2 и x_3 шт., составит $62x_2$ и $76x_3$ р.

Тогда суммарный доход от реализации выпущенных в продажу наборов будет равен сумме $72x_1 + 62x_2 + 76x_3$ р. В интересах кондитерской фабрики суммарный доход необходимо максимизировать. Следовательно, целевая функция в задаче примет вид

$$f(x) = 72x_1 + 62x_2 + 76x_3 \to \max.$$

Конечные запасы каждого вида конфет ограничивают их расход при производстве всех видов наборов. Выразим расход каждого вида конфет через переменные задачи. Начнем с первого вида конфет – «Сникерс».

На составление одного набора первого вида идет 0,3 кг конфет «Сникерс». Если наборов первого вида поступит в продажу x_1 шт., то на это количество набор будет использовано $0,3x_1$ кг. конфет «Сникерс». Аналогично, если наборов второго и третьего вида будут выпущены в количестве x_2 и x_3 шт., то на их выпуск конфет «Сникерс» будет использовано $0,2x_2$ и $0,4x_3$ кг. Суммарный расход «Сникерса» на выпуск всех подарочных наборов в количестве x_1, x_2 и x_3 шт. составит $0,3x_1 + 0,2x_2 + 0,4x_3$ кг., и это количество не должно превышать запаса этих конфет равного 600 кг. Поэтому первое ограничение на расход «Сникерса» запишется в виде

$$0,3x_1 + 0,2x_2 + 0,4x_3 \le 600.$$

Аналогичные рассуждения приводят к следующим ограничениям на расход конфет при производстве подарочных наборов

- конфеты «Марс»

$$0,2x_1 + 0,3x_2 + 0,2x_3 \le 700,$$

- конфеты «Баунти»

$$0,2x_1 + 0,1x_2 + 0,1x_3 \le 500.$$

И наконец, объемы производства подарочных наборов не могут быть отрицательными, хотя и могут быть равными нулю. Это условие добавляет следующие ограничения на объемы выпуска наборов

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$$

Таким образом, оптимизационная математическая модель, описывающая производство подарочных наборов при условии выполнения ограничений на расход конфет имеет вид

$$f(x) = 72x_1 + 62x_2 + 76x_3 \to \max, \tag{1}$$

$$0,3x_1 + 0,2x_2 + 0,4x_3 \le 600,$$

$$0,2x_1 + 0,3x_2 + 0,2x_3 \le 700,$$

$$0,2x_1 + 0,1x_2 + 0,1x_3 \le 500,$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$$

Исследуем теперь вторую возможность (продать конфеты другой кондитерской фабрике). Здесь возникает вопрос, по каким ценам продавать конфеты?

Обозначим стоимость одного килограмма:

y_1 – стоимость одного килограмма конфет «Сникерс»;

y_2 – стоимость одного килограмма конфет «Марс»;

y_3 – стоимость одного килограмма конфет «Баунти».

Целевая функция задачи будет отражать интересы покупателя. Для него единственное пожелание заключается в сокращении до минимума расходов на покупку конфет. Поскольку один килограмм конфет «Сникерс» стоит y_1 р., то стоимость всех конфет «Сникерс», которые имеются в запасе, составит $600y_1$ р. Аналогично, стоимость конфет «Марс» и «Баунти», которые имеются в запасе 700 и 500 кг., составит $700y_2$ и $500y_3$ р. соответственно.

Тогда суммарная стоимость всех конфет, которые подлежат реализации, составит $600y_1 + 700y_2 + 500y_3$ р.

Следовательно, описывая интересы покупателя, получим следующую целевую функцию

$$g(y) = 600y_1 + 700y_2 + 500y_3 \to \min .$$

Рассчитаем, во сколько обходится кондитерской фабрике составление одного набора первого вида.

На составление одного набора первого вида идет 0,3 кг конфет «Сникерс». Стоимость одного килограмма этих конфет составляет y_1 р., тогда стоимость конфет «Сникерс», входящих в один набор первого вида составит $0,3y_1$ р. Следовательно, если стоимость конфет «Марс» и «Баунти» составляет y_2 и y_3 р., то стоимость этих конфет, входящих в один набор первого вида, составит $0,2y_2$ и $0,2y_3$ соответственно. Таким образом, один набор первого вида обходится кондитерской фабрике в $0,3y_1 + 0,2y_2 + 0,2y_3$ р.

Аналогичные рассуждения приводят к следующим условиям

- стоимость одного набора второго вида

$$0,2y_1 + 0,3y_2 + 0,1y_3,$$

- стоимость одного набора третьего вида

$$0,4y_1 + 0,2y_2 + 0,1y_3.$$

Справедливое требование кондитерской фабрики к ценам на конфеты состоит в следующем: если взять конфеты, идущие на изготовление каждого новогоднего набора, то выручка от их продажи должна быть не меньше, чем доход от реализации готовых наборов (в противном случае нет смысла продавать конфеты – лучше изготовить из них наборы и получить доход от их реализации). Это требование приводит к ограничениям

$$0,3y_1 + 0,2y_2 + 0,2y_3 \geq 72,$$

$$0,2y_1 + 0,3y_2 + 0,1y_3 \geq 62,$$

$$0,4y_1 + 0,2y_2 + 0,1y_3 \geq 76.$$

Поскольку y_1, y_2 и y_3 – это стоимость одного килограмма конфет каждого вида, то исходя из содержательного смысл переменных получаем условие

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.$$

Следовательно, получаем задачу

$$g(y) = 600y_1 + 700y_2 + 500y_3 \to \min, \tag{2}$$

$$0,3y_1 + 0,2y_2 + 0,2y_3 \geq 72,$$

$$0,2y_1 + 0,3y_2 + 0,1y_3 \geq 62,$$

$$0,4y_1 + 0,2y_2 + 0,1y_3 \geq 76,$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.$$

Задачи (1) и (2) называются двойственными задачами линейного программирования.

Запишем задачи (1) и (2) в общей постановке, для этого вернемся к задаче оптимального планирования производства

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max,$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m,$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Напомним содержательный смысл параметров и переменных задачи: b_i – общее количество ресурса R_i, a_{ij} – количество ресурса R_i, которое используется для производства единицы продукции P_j, x_j – количество продукции P_j, планируемое к выпуску.

Прямая задача: найти план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль при заданных ограничениях на расход ресурсов.

Для формулировки двойственной задачи будем учитывать ценность ресурсов. Предположим, что в рамках некоторого объединения одно предприятие реализует ресурсы другому предприятию. Первое предприятие оценивает свои ресурсы с точки зрения возможной прибыли от производимой продукции и условием продажи считает оценку ресурсов не меньшую, чем прибыль от готовой продукции. Второе предприятие имеет цель минимизировать стоимость приобретаемых ресурсов.

В этой связи возникает ***двойственная задача***: установить такие цены на ресурсы (внутри объединения), чтобы минимизировать их общую стоимость (интерес покупателя) при условии, чтобы стоимость расхода ресурсов на еди-

ницу продукции была не ниже соответствующей прибыли от реализации (интерес продавца).

Проведем формализацию этой задачи. Пусть $y_i \geq 0$ – планируемая цена (оценка) ресурса R_i, $i = 1, ..., m$. Тогда общая стоимость ресурсов выражается величиной $b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m$. Стоимость ресурсов, необходимых для производства единицы продукции P_j, равна $a_{1j} y_1 + a_{2j} y_2 + ... + a_{mj} y_m$. С учетом заявленных требований приходим к следующей задаче линейного программирования относительно переменных $y_1, y_2, ..., y_m$

$$g(y) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m \to \min,$$
$$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + ... + a_{m1} y_m \geq c_1,$$
$$a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + ... + a_{m2} y_m \geq c_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + ... + a_{mn} y_m \geq c_n,$$
$$y_i \geq 0, \qquad i = 1, 2, ..., m.$$

Это двойственная задача по отношению к прямой задаче. По существу, она является стандартной задачей линейного программирования.

Выписывая матрицы условий для прямой и двойственной задачи

$$A_{пр} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad A_{дв} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

видим, что $A_{дв} = A_{пр}^T$ (значок T означает операцию транспонирования матрицы).

Следовательно, пара двойственных задач может быть записана в векторно-матричной форме:

<u>Прямая задача</u>	<u>Двойственная задача</u>
$f(x) = < c, x > \to \max,$	$g(y) = < b, y > \to \min,$
$Ax \leq b, \qquad x \geq 0.$	$A^T y \geq c, \qquad y \geq 0.$

В целом двойственная задача по отношению к исходной задаче (прямой) строится согласно следующим правилам.

1. Число переменных в двойственной задаче равно числу основных ограничений в прямой задаче, и наоборот.

2. Матрица условий двойственной задачи получается из матрицы условий прямой задачи путем транспонирования.

3. Система ограничений двойственной задачи записывается в виде неравенств противоположного смысла неравенствам системы ограничений прямой задачи.

4. Вектор ограничений двойственной задачи является целевым вектором прямой задачи.

5. Целевым вектором двойственной задачи является вектор ограничений прямой задачи.

6. Двойственная задача решается на минимум, если целевая функция прямой задачи стремится к максимуму.

Пример 2.

Рассмотрим стандартную задачу с двумя переменными, тремя ограничениями в форме неравенств и условиями неотрицательности.

$$f(x) = 2x_1 - 4x_2 \to \max,$$
$$x_1 + 3x_2 \le 8,$$
$$-3x_1 + x_2 \le -7,$$
$$2x_1 - 5x_2 \le 10,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Построим к ней двойственную задачу, руководствуясь правилами 1 – 6. Она будет иметь три переменных и два ограничения.

$$g(y) = 8y_1 - 7y_2 + 10y_3 \to \min,$$
$$y_1 - 3y_2 + 2y_3 \ge 2,$$
$$3y_1 + y_2 - 5y_3 \ge -4,$$
$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0, \quad y_3 \ge 0.$$

Двойственные задачи (1) и (2) образуют симметричную двойственную пару.

Связь между планами двойственных задач

Рассмотрим симметричную пару двойственных задач:

Прямая задача	Двойственная задача
$f(x) = < c, x > \to \max,$	$g(y) = < b, y > \to \min,$
$Ax \le b, \qquad x \ge 0.$	$A^T y \ge c, \qquad y \ge 0.$

Установим простейшие свойства двойственной пары.

Свойство 1. Основное неравенство теории двойственности. Для любых допустимых планов x (прямой задачи) и y (двойственной задачи) выполняется неравенство

$$< c, x > \le < b, y >.$$

Из этого свойства вытекают следующие следствия.

Следствие 1. Если целевая функция прямой задачи не ограничена сверху, то множество допустимых планов двойственной задачи пусто.

Следствие 2. Если целевая функция двойственной задачи не ограничена снизу, то множество допустимых планов прямой задачи пусто.

Таким образом, либо обе задачи имеют решение, либо обе не разрешимы.

Свойство 2. Пусть $\bar{x}$ – допустимый план прямой задачи, $\bar{y}$ – допустимый план двойственной задачи, причем $< c, \bar{x} > = < b, \bar{y} >$. Тогда $\bar{x}$ – решение прямой задачи, $\bar{y}$ – решение двойственной задачи.

Отметим, что это свойство формулирует достаточное условие оптимальности в двойственной паре задач.

Первая теорема двойственности. Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальный план, то и другая имеет оптимальный план, причем значения целевых функций на этих планах равны

$$f(x^*) = g(y^*) \quad \text{или} \quad < c, x^* > = < b, y^* >.$$

Экономический смысл первой теоремы двойственности состоит в том, что при оптимальной организации выпуска продукции и оптимальных ценах на потребляемые ресурсы оба способа их использования (выпуск продукции или продажа ресурсов) равноценны. Однако при неоптимальном плане производства продукции всегда прибыль от ее реализации будет меньше стоимости используемых ресурсов, что следует из основного неравенства теории двойственности.

Первая теорема двойственности позволяет проверить на оптимальность некоторый допустимый план прямой задачи, если удастся решить двойственную задачу.

Вторая теорема двойственности. Допустимые планы $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ и $y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ – оптимальны (каждый в своей задаче), тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$< Ax^* - b, y^* > = 0 \tag{3}$$

$$< A^T y^* - c, x^* > = 0 \tag{4}$$

Условия (3), (4) называются условиями равновесия. Рассмотрим их содержательный смысл для симметричной пары двойственных задач. Раскрывая скалярные произведения, распишем условия (3) и (4) более подробно

$$\sum_{i=1}^{m} (a_{i1} x_1^* + ... + a_{in} x_n^* - b_i) \cdot y_i^* = 0, \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{1j} y_1^* + ... + a_{mj} y_m^* - c_j) \cdot x_j^* = 0. \tag{6}$$

В сумме (5) каждое слагаемое есть произведение разности левой и правой частей ограничения прямой задачи на соответствующую двойственную переменную. Очевидно, что все слагаемые имеют один и тот же знак (≤ 0), так как разности в круглых скобках меньше или равны нулю, а $y_i^* \geq 0$. Отсюда следует, что сумма (5) равна нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое в ней равно нулю.

$$(a_{i1}x_1^* + ... + a_{in}x_n^* - b_i) \cdot y_i^* = 0, \quad i = 1, ..., m. \tag{7}$$

В сумме (6) каждое слагаемое равно произведению разности левой и правой частей ограничения двойственной задачи на соответствующую переменную прямой задачи. Все слагаемые в этой сумме одного знака (≥ 0), так как разности в круглых скобках и переменные x_j^* неотрицательны. Для того, чтобы сумма равнялась нулю, любое слагаемое в сумме должно быть равно нулю.

$$(a_{1j}y_1^* + ... + a_{mj}y_m^* - c_j) \cdot x_j^* = 0, \quad j = 1, ..., n. \tag{8}$$

Учитывая знаки сомножителей в произведении (7), из него можно получить пару условий

$$\textit{если } a_{i1}x_1^* + ... + a_{in}x_n^* < b_i, \textit{ то } y_i^* = 0. \tag{7a}$$

$$\textit{если } y_i^* > 0, \textit{ то } a_{i1}x_1^* + ... + a_{in}x_n^* = b_i. \tag{7b}$$

Аналогично, из (8) следует пара условий

$$\textit{если } a_{1j}y_1^* + ... + a_{mj}y_m^* > c_j, \textit{ то } x_j^* = 0. \tag{8a}$$

$$\textit{если } x_j^* > 0, \textit{ то } a_{1j}y_1^* + ... + a_{mj}y_m^* = c_j. \tag{8b}$$

Таким образом, для пары двойственных задач:

– если какое-либо ограничение одной задачи на оптимальном плане выполняется как строгое неравенство, то соответствующая координата оптимального плана другой задачи равна нулю (условия (7a) и (8a)),

– если какая-либо координата оптимального плана одной задачи положительна, то соответствующее ограничение другой задачи обращается в равенство (условия (7b) и (8b)).

Дадим экономическую интерпретацию этим условиям в рамках задачи оптимального планирования производства. Пусть $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ – оптимальный план выпуска, $y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ – оптимальный вектор двойственных оценок ресурсов.

Двойственные оценки различных видов ресурсов не всегда можно отождествлять с действительными ценами, по которым осуществляется их закупка. Чаще всего речь идет о некоторой мере, имеющей экономическую природу, которая характеризует ценность ресурса относительно увеличения прибыли, только относительно полученного оптимального плана. Нулевые двойственные оценки свидетельствуют о не дефицитности соответствующего ресурса.

Определение. Ресурс R_i будем называть дефицитным на плане производства $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$, если на этом плане он расходуется полностью

$$a_{i1}\bar{x}_1 + a_{i2}\bar{x}_2 + ... + a_{in}\bar{x}_n = b_i .$$

Определение. Ресурс R_i называется недефицитным на плане производства $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$, если на этом плане он расходуется не полностью

$$a_{i1}\bar{x}_1 + a_{i2}\bar{x}_2 + ... + a_{in}\bar{x}_n < b_i .$$

Определение. Продукт P_j называется рентабельным при плане производства $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$, если согласно этому плану он производится.

Определение. Продукт P_j называется нерентабельным при плане производства $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$, если согласно этому плану он не выпускается.

Тогда условия равновесия допускают следующее толкование:

– если ресурс R_i не дефицитен, то его двойственная оценка равна нулю;

– если ресурс R_i имеет положительную двойственную оценку, то он является дефицитным;

– если стоимость расхода ресурсов на единицу продукта P_j больше соответствующей прибыли от реализации, то продукт P_j при оптимальном плане планирования производства является не рентабельным;

– если продукт P_j является рентабельным по оптимальному плану производства, то стоимость расхода ресурсов на его производство совпадает с прибылью от его реализации.

Условия равновесия позволяют находить решение одной из пары двойственных задач линейного программирования по известному оптимальному плану другой задачи.

Пример 3.

Процесс изготовления трех видов промышленных изделий состоит в последовательной обработке каждого из них на двух станках. Время использования этих станков для производства данных изделий ограниченно 30 и 70 часами в неделю. Время обработки одного изделия каждого вида приведены в таблице.

Станки	***Время обработки одного изделия (час)***		
	Изделие 1	***Изделие 2***	***Изделие 3***
1	1	1	1
2	1	2	0

Требуется найти оптимальные объемы производства изделий каждого вида, если цена первого изделия – *$600*, второго изделия – *$800*, третьего изделия – *$100*.

Решение. Построим математическую модель задачи. Обозначим через x_1, x_2 и x_3 – количество изделий первого, второго и третьего вида, планируемое к производству. Тогда математическая модель задачи будет иметь вид

$$f(x) = 600x_1 + 800x_2 + 100x_3 \to \max,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 30,$$

$$x_1 + 2x_2 \le 70,$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$$

Двойственная задача будет иметь вид

$$g(y) = 30y_1 + 70y_2 \to \min,$$

$$y_1 + y_2 \ge 600,$$

$$y_1 + 2y_2 \ge 800,$$

$$y_1 \ge 100,$$

$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0.$$

Решим ее геометрически. Построим граничные прямые:

(p_1) $y_1 + y_2 = 600$ проходит через точки (0, 600), (600, 0);

(p_2) $y_1 + 2y_2 = 800$ проходит через точки (0, 400), (800, 0);

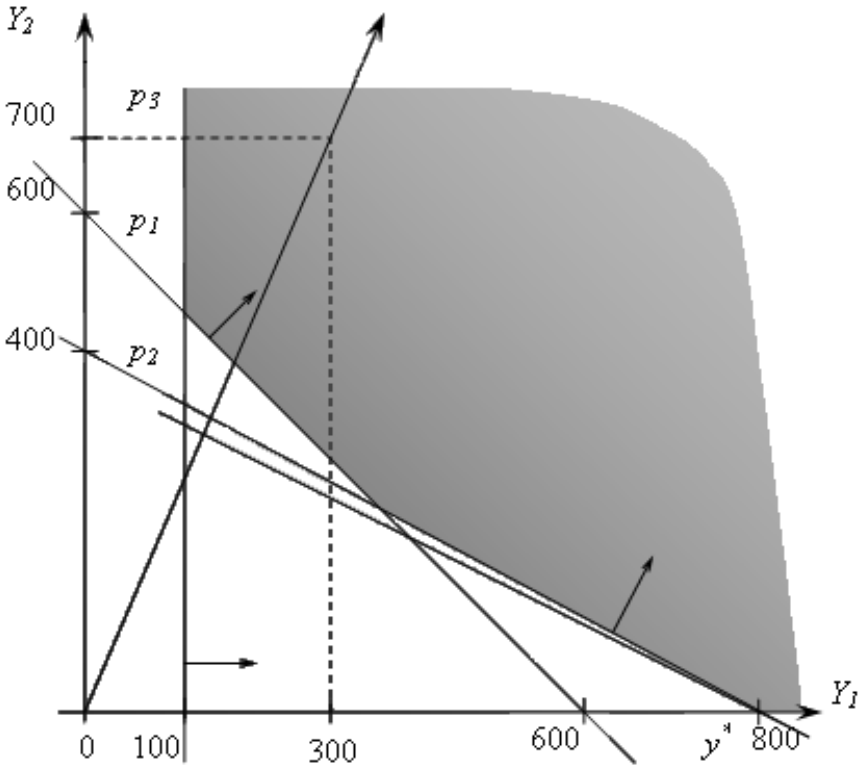
(p_3) $y_1 = 100$ проходит через точку (100, 0), параллельно оси y_2;

и целевой вектор $c = (30, 70)$.

Подставляя координаты точки (0,0) в неравенство $y_1 + y_2 \ge 600$ видим, что начало координат не лежит в искомой полуплоскости ($0 + 0 < 600$), значит все точки, удовлетворяющие неравенству, расположены выше прямой p_1. Отметим эту область стрелкой. Аналогично строится вторая и третья полуплоскость.

Наконец, условия неотрицательности: $y_1 \ge 0$, $y_2 \ge 0$ задают все точки первой четверти.

Выделяя теперь все точки плоскости, удовлетворяющие всем ограничениям задачи, то есть расположенные одновременно во всех полуплоскостях, получаем множество допустимых планов Y. Оно представляет собой выпуклое многоугольное множество.



Оптимальный план y^* лежит на пересечении прямой p_2 с осью y_1 и имеет вид $y^* = (800, 0)$, значение целевой функции на решении двойственной задачи будет равно $g(y^*) = 24000$.

Сформируем условия равновесия для пары двойственных задач

$$(y_1 + y_2 - 600)x_1 = 0,$$
$$(y_1 + 2y_2 - 800)x_2 = 0,$$
$$(y_1 - 100)x_3 = 0,$$
$$(x_1 + x_2 + x_3 - 30)y_1 = 0,$$
$$(x_1 + 2x_2 - 70)y_2 = 0.$$

Подставляя в каждое условие оптимальный план $y^* = (800, 0)$, получаем

$$\begin{array}{ccccc} 200 \cdot x_1 = 0 & & x_1^* = 0 & & \\ 0 \cdot x_2 = 0 & & x_2^* \geq 0 & & x_1^* = 0 \\ 700 \cdot x_3 = 0 & \Rightarrow & x_3^* = 0 & \Rightarrow & x_2^* = 30 \\ (x_1 + x_2 + x_3 - 30) \cdot 800 = 0 & & x_1 + x_2 + x_3 - 30 = 0 & & x_3^* = 0 \\ (x_1 + 2x_2 - 70) \cdot 0 = 0 & & x_1 + 2x_2 - 70 \leq 0 & & \end{array}$$

То есть оптимальный план $x^* = (0, 30, 0)$, $f(x^*) = 24000$. Поскольку на оптимальных планах двойственных задач значения функций совпали ($f(x^*) = g(y^*) = 24000$), то задача решена правильно.

Тест № 4 по теме «Двойственные задачи линейного программирования»

1. В двойственной паре задач линейного программирования для любых допустимых планов справедливо…

a) $< c, x > \le < b, y >$;

b) $< c, x > \ge < b, y >$;

c) $< c, x > = < b, y >$.

2. Пусть x^* – решение прямой задачи, а y^* – решение двойственной задачи, тогда справедливо…

a) $< c, x^* > = < b, y^* >$;

b) $< c, x^* > \ge < b, y^* >$;

c) $< c, x^* > \le < b, y^* >$.

3. Число переменных в двойственной задаче равно…

a) числу основных ограничений в прямой задаче;

b) числу переменных в прямой задаче;

c) числу основных ограничений в двойственной задаче.

4. Дана прямая задача

$$f(x) = 5x_1 + 6x_2 - x_3 \to \max,$$
$$4x_1 + x_2 - 3x_3 \le 6,$$
$$7x_1 - x_2 + 3x_3 \le -8,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0,$$

тогда целевая функция двойственной задачи будет иметь вид…

a) $g(y) = 6y_1 - 8y_2$;

b) $g(y) = 5y_1 + 6y_2 - y_3$;

c) $g(y) = y_1 + y_2$.

5. Дана прямая задача

$$f(x) = 5x_1 + 6x_2 - x_3 \to \max,$$
$$4x_1 + x_2 - 3x_3 \le 6,$$
$$7x_1 - x_2 + 3x_3 \le -8,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0,$$

тогда матрица условий двойственной задачи будет иметь вид…

a) $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 7 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & 6 \\ 7 & -1 & 3 & -8 \end{pmatrix}$.

6. Симметричной двойственной парой называется двойственная пара задач в которой прямая задача – это...

a) стандартная задача линейного программирования;

b) каноническая задача линейного программирования;

c) общая задача линейного программирования.

7. Дана прямая задача

$$f(x) = 4x_1 + 5x_2 \to \max,$$
$$6x_1 - 9x_2 \le 12,$$
$$-2x_1 - 6x_2 \le -2,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$$

тогда двойственная задача будет иметь вид…

a) $g(y) = 12y_1 - 2y_2 \to \min$,

$$6y_1 - 2y_2 \ge 4,$$
$$-9y_1 - 6y_2 \ge 5,$$
$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0;$$

b) $g(y) = 12y_1 - 2y_2 \to \min$,

$$6y_1 - 2y_2 \le 4,$$
$$-9y_1 - 6y_2 \le 5,$$
$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0;$$

c) $g(y) = 12y_1 - 2y_2 \to \min$,

$$6y_1 - 2y_2 = 4,$$
$$-9y_1 - 6y_2 = 5.$$

8. Дана прямая задача

$$f(x) = x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \le 4,$$
$$x_1 \le 2,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

при этом решение двойственной задачи имеет вид $y^* = (2; 0)$. Тогда, какая точка является решением прямой задачи?

a) (0; 4);
b) (0; 8);
c) (2; 2).

9. Дана прямая задача

$$f(x) = 2x_1 - x_2 \to \max,$$
$$x_1 - x_2 \leq 2,$$
$$x_2 \leq 3,$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

тогда решение двойственной задачи будет иметь вид…

a) (2; 1);
b) (0; 0);
c) (2; 0).

10. Если на оптимальном плане x^* ресурс R_i – не дефицитен, то его теневая цена y^*…

a) равна нулю;
b) больше нуля;
c) меньше нуля.

Транспортная задача

В современных условиях большие транспортные расходы связаны с простоями в ожидании обслуживания на погрузочно-разгрузочных работах, порожними пробегами, встречными и нерациональными перевозками, затратами на бензин, техническое обслуживание и заработную плату водителей. В связи с этим необходимо решать задачи оптимального планирования перевозок грузов, которые позволяют оптимизировать план по какому-либо экономическому показателю, например, финансовые затраты или время на перевозку грузов. Такие задачи составляют специальный класс задач линейного программирования, и называются транспортными задачами. Целый ряд экономических задач является или модификацией транспортной задачи, или могут быть сведены к транспортной задаче путем определенных преобразований (к таким задачам относятся, например, задача о назначениях).

Рассмотрим постановку и модель транспортной задачи. Имеется m пунктов отправления (поставщиков) грузов $A_1, A_2, ..., A_m$, на которых сосредоточены запасы какого-либо однородного груза в объемах $a_1, a_2, ..., a_m$ соответственно. Величины a_i, $i = \overline{1, m}$ определяют максимально возможные размеры вывоза груза с пунктов отправления. Суммарный запас груза у поставщиков составляет $\sum_{i=1}^{m} a_i$. Кроме того, имеется n пунктов назначения $B_1, B_2, ..., B_n$, которые подали заявки на поставку грузов в объемах $b_1, b_2, ..., b_n$ соответственно. Суммарная величина заявок составляет $\sum_{j=1}^{n} b_j$. Стоимость перевозки одной единицы груза от поставщика A_i к потребителю B_j обозначим через c_{ij} (транспортный тариф). Тогда транспортная задача формулируется следующим образом: необходимо составить оптимальный план перевозок груза, то есть найти такие значения объема перевозок груза x_{ij}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ от поставщиков A_i к потребителям B_j, чтобы вывести все грузы от поставщиков, удовлетворить заявки всех потребителей и обеспечить минимальные транспортные расходы на перевозку груза.

Математическая модель транспортной задачи состоит в минимизации функции

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, ..., m, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, ..., n, \tag{3}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, ..., m, \quad j = 1, ..., n. \tag{4}$$

Всякое неотрицательное решение системы линейных уравнений (2), (3), определяемое матрицей $X = [x_{ij}]$, называется планом перевозок транспортной задачи. План перевозок, имеющий не более $m + n - 1$ отличных от нуля переменных x_{ij}, называется *опорным*. Если число отличных от нуля компонент в опорном плане равно в точности $m + n - 1$, то план перевозок называется невырожденным, если меньше этого числа, то вырожденным.

План перевозок X^*, при котором функция (1) принимает свое минимальное значение, называется оптимальным планом транспортной задачи.

На практике при перевозке грузов могут возникать следующие ситуации:

1. Количество единиц груза у поставщиков отвечает заявкам или спросу со стороны потребителей, что отражается в условии баланса:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Такая транспортная задача является сбалансированной, а модель такой задачи – закрытой. Математическая модель такой задачи записывается в виде (1) – (4).

2. Количество груза у всех поставщиков больше, чем потребностей в этом грузе у потребителей:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Следовательно, часть груза у поставщиков остается невостребованной, а потребители получают весь необходимый груз. Математическая модель такой задачи будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} & f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min, \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \quad i = 1, ..., m, \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, ..., n, \\ & x_{ij} \ge 0, \quad i = 1, ..., m, \quad j = 1, ..., n. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

3. Количество груза у всех поставщиков меньше потребностей в данном грузе у всех потребителей:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

В этом случае каждый поставщик весь свой груз вывезет, а часть потребителей получит груза меньше необходимого количества. Тогда модель транспортной задачи будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} & f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min, \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, ..., m, \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j, \quad j = 1, ..., n, \\ & x_{ij} \ge 0, \quad i = 1, ..., m, \quad j = 1, ..., n. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Математические модели транспортной задачи (5), (6) называются открытыми, а задача – несбалансированной.

Транспортная задача является специальной задачей линейного программирования, поэтому ей присущи следующие особенности:

1) ограничения закрытой модели задаются в виде уравнений, а открытой модели – в виде смешанной системы ограничений – неравенств и равенств, которые также могут быть приведены к ограничениям равенствам (каноническая задача линейного программирования);

2) каждая неизвестная входит лишь в два уравнения;

3) коэффициенты при неизвестных равны единице.

С учетом этих особенностей для решения транспортной задачи разработаны специальные методы, которые в настоящее время эффективны лишь при небольшом количестве неизвестных. При большом количестве переменных транспортная задача может быть решена на компьютере, поскольку математические методы, как правило, реализованы в виде специальных программ.

Пример 1.

Предприятие занимается производством косметики, которую затем поставляет в логистическую компанию. Там она сортируется, упаковывается, консолидируется в большие косметические наборы и затем доставляется оптовым поставщикам.

Логистическая компания располагает тремя пунктами упаковки косметики расположенными в Твери, Ярославле и Смоленске, откуда сформированные наборы перевозятся на грузовиках к четырем оптовым поставщикам, расположенным в Москве, Санкт-Петербурге, Нижнем Новгороде и Саратове.

Дневная производительность по формированию косметических наборов составляет 1300 наборов в день в Твери, 1800 наборов в Ярославле и 1500 наборов в Смоленске. Дневной спрос на наборы с косметикой у оптовых поставщиков в Москве, Санкт-Петербурге, Нижнем Новгороде и Саратове составляет 1700, 1300, 700 и 900 наборов соответственно. Стоимость доставки (транспортные тарифы) одного набора из пунктов упаковки к каждому оптовому поставщику приведены в таблице.

Пункты упаковки наборов	***Стоимость доставки одного набора из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения***			
	Москва	**Санкт-Петербург**	**Нижний Новгород**	**Саратов**
Тверь	15	32	24	48
Ярославль	17	37	12	42
Смоленск	18	38	28	51

Логистическая компания должна принять решение, сколько наборов с косметикой необходимо отправлять из каждого пункта упаковки каждому оптовому поставщику, чтобы:

1) все наборы с каждого пункта упаковки были вывезены;

2) спрос на наборы с косметикой каждого оптового поставщика был полностью удовлетворен;

3) суммарные затраты на транспортировку всех наборов были минимальными.

Построим математическую модель этой задачи. Обозначим пункты отправления индексом i, так что $i=1$ соответствует Твери, $i=2$ – Ярославлю и $i=3$ – Смоленску, а пункты назначения – индексом j, при этом $j=1$ соответствует Москве, $j=2$ – Санкт-Петербургу, $j=3$ – Нижнему Новгороду и $j=4$ – Саратову.

Пусть x_{ij} представляют собой объемы ежедневных перевозок наборов между пунктами отправления i $(i=1,2,3)$ и пунктами назначения j $(j=1,2,3,4)$. Тогда план перевозок наборов можно записать в виде матрицы

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix}.$$

Транспортные расходы на перевозку наборов косметики из пункта упаковки в Твери $(i=1)$ ко всем оптовым поставщикам в Москве, Санкт-Петербурге, Нижнем Новгороде и Саратове (соответственно $j=1,2,3,4$) составят $15x_{11}+32x_{12}+24x_{13}+48x_{14}$. Аналогично, транспортные расходы на транспортировку наборов из Ярославля $(i=2)$ составят $17x_{21}+37x_{22}+12x_{23}+42x_{24}$, а из Смоленска $(i=3)$ составят $18x_{31}+38x_{32}+28x_{33}+51x_{34}$. Тогда суммарные транспортные расходы, которые должны быть минимальны, будут равны сумме транспортных расходов по доставке наборов из Твери, Ярославля и Рязани ко всем потребителям:

$$f(x)=15x_{11}+32x_{12}+24x_{13}+48x_{14}+17x_{21}+37x_{22}+12x_{23}+42x_{24}+$$
$$+18x_{31}+38x_{32}+28x_{33}+51x_{34}\to\min.$$

Ограничения транспортной задачи должны содержать ограничения двух видов в соответствии с условиями задачи: (1) все наборы с каждого пункта отправления должны быть вывезены и (2) спрос на наборы в каждом пункте назначения должен быть полностью удовлетворен.

1) Количество наборов, отправляемых с каждого пункта упаковки ко всем оптовым поставщикам, должно быть в точности равно количеству производимых наборов в каждом пункте упаковки. Количество наборов, отправляемых из пункта упаковки в Твери $(i=1)$, составляет $x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}$ и должно быть

равно количеству наборов (1300), упаковываемых в Твери, поэтому соответствующее ограничение имеет вид $x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1300$. Аналогично, количество наборов, отправляемых из Ярославля $(i=2)$ и Смоленска $(i=3)$, должны быть равны количеству производимых на них наборов (1800 и 1500 соответственно), так что соответствующие ограничения имеют вид $x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1800$ – для Ярославля и $x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1500$ – для Смоленска.

2) Спрос на наборы в каждом пункте назначения должен быть в точности равен суммарному объему поставок из всех пунктов отправления. Так, спрос на 1700 наборов в Москве $(j=1)$ должен быть равен объему поставок из всех пунктов отправления наборов, расположенных в Твери, Ярославле и Смоленске, поэтому ограничение имеет вид $x_{11}+x_{21}+x_{31}=1700$. Удовлетворение спроса на наборы в Санкт-Петербурге $(j=2)$, Нижнем Новгороде $(j=3)$ и Саратове $(j=4)$ приводят к ограничениям: $x_{12}+x_{22}+x_{32}=1300$ – для Санкт-Петербурга, $x_{13}+x_{23}+x_{33}=700$ – для Нижнего Новгорода, $x_{14}+x_{24}+x_{34}=900$ – для Саратова. Кроме того, объемы поставок должны быть неотрицательными.

Таким образом, математическая модель транспортной задачи имеет вид

$$f(x)=15x_{11}+32x_{12}+24x_{13}+48x_{14}+17x_{21}+37x_{22}+12x_{23}+42x_{24}+$$
$$+18x_{31}+38x_{32}+28x_{33}+51x_{34}\to\min,$$
$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1300,$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1800,$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1500,$$
$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=1700,$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=1300,$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=700,$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}=900,$$
$$x_{ij}\ge 0,\quad i=1,2,3,\quad j=1,2,3,4.$$

Обратим внимание на следующие особенности транспортной модели:

– переменные модели x_{ij} имеют два индекса, первый индекс i соответствует номеру поставщика, а второй индекс j – номеру пункта назначения груза;

– ограничения записываются в форме равенств;

– при целых значениях объемов запаса и спроса оптимальное решение задачи будет целочисленным.

В основе решения транспортной задачи лежит метод, состоящий из трех этапов:

1) построение начального опорного плана перевозок;

2) проверка построенного плана на оптимальность;

3) улучшение построенного плана перевозок.

Как отмечено выше, первым этапом решения транспортной задачи является построение начального опорного плана перевозок, т.е. плана перевозок, удовлетворяющего всем ее ограничениям. Приведем два метода построения такого плана – метод северо-западного угла и метод минимального тарифа. Их сущность состоит в том, что начальный план перевозок находят за не более чем $(m+n-1)$ шагов, на каждом из которых в транспортной таблице заполняют одну клетку, которую называют занятой. Заполнение одной клетки обеспечивает полностью либо удовлетворение потребности в грузе одного из пунктов назначения, либо вывоз груза из одного из пунктов отправления. Различаются эти планы по принципам выбора заполняемых клеток и в зависимости от этого могут давать планы, более и менее отличные от оптимального.

Рассмотрим оба метода для таблицы

Поставщики	***Потребители***				***Запас***
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	… …	c_{1n} x_{1n}	a_1
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	… …	c_{mn} x_{mn}	a_m
Спрос	b_1	b_2	…	b_n	

1) Метод северо-западного угла. Заполнение таблицы начинается с левой верхней клетки, куда дается максимально возможная поставка. Объем поставки выбирается таким образом, чтобы полностью закрыть либо потребность по столбцу b_1, либо запас по строке a_1, т.е. в качестве x_{11} выбирают минимум между запасами груза на первом складе и потребностями в грузе у первого потребителя: $x_{11} = \min\{a_1, b_1\}$. Дальнейшее заполнение таблицы происходит слева направо, сверху вниз. На каждом шаге заполнения должна выпасть либо строка, либо столбец таблицы.

2) Метод наименьшего тарифа. Заполнение таблицы начинается с клетки с наименьшим тарифом. Если таких клеток несколько, то заполняется та, у которой объем перевозок больше. Объем поставки определяется так же, как и в методе северо-западного угла. Заполнив первую клетку, среди оставшихся клеток выбираем клетку с наименьшим тарифом и т.д.

Замечание: Если транспортная задача является открытой и введены фиктивные поставщики или фиктивные потребители, то распределение осуществляется сначала для действительных поставщиков и потребителей: от фиктивных поставщиков к фиктивным потребителям груз направляется в последнюю очередь.

Если число занятых клеток в построенном плане перевозок меньше, чем $m+n-1$, т.е. план является вырожденным, то необходимо внести 0^* (0^* – вводится фиктивная перевозка) в несколько свободных клеток транспортной таблицы так, чтобы общее число занятых клеток стало равным $m+n-1$, т.е. построенный план перевозок стал невырожденным.

При составлении начального опорного плана, заполняя клетку таблицы, из рассмотрения выводится либо строка, либо столбец таблицы. Если запас в строке и спрос в столбце совпадают, то после заполнения соответствующей клетки таблицы пришлось бы выводить строку и столбец одновременно, чего делать нельзя, так как число занятых клеток будет меньше, чем $m+n-1$. Поэтому выводить из рассмотрения можно, например, строку, тогда потребности в соответствующем столбце полагают равными 0. Аналогично, если из рассмотрения убирают столбец, то запасы в соответствующей строке становятся нулевыми. Тогда на одном из следующих шагов заполнения таблицы появится фиктивная перевозка, равная 0 (0^*).

Вторым этапом решения транспортной задачи является проверка построенного плана на оптимальность и его улучшение (если он не оптимален). Эту задачу решают с помощью метода потенциалов.

Применение метода потенциалов основано на следующей теореме.

Теорема. Для оптимальности опорного плана перевозок $X=[x_{ij}]$ транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы существовали числа u_i, $i=1,...,m$ (потенциалы поставщиков) и v_j, $j=1,...,n$, (потенциалы потребителей) удовлетворяющие условиям

$$u_i+v_j=c_{ij} \quad \text{при} \quad x_{ij}>0;$$

$$u_i+v_j\le c_{ij} \quad \text{при} \quad x_{ij}=0.$$

Замечание. Теорема допускает следующую экономическую интерпретацию. Пусть каждый поставщик A_i вносит за перевозку единицы груза (одному или нескольким потребителям) какую-то сумму u_i, в свою очередь каждый из

потребителей B_j также вносит за перевозку единицы груза сумму v_j. Допустим, что эти платежи передаются некоторому третьему лицу (перевозчику).

Предположим, что интересы поставщиков и потребителей не противоречат друг другу, и они действуют как единая экономическая система. Пусть перевозка единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения объективно стоит c_{ij}, а поставщик A_i и потребитель B_j вместе платят за эту перевозку сумму $u_i + v_j = \bar{c}_{ij}$, которая называется «псевдостоимостью» перевозки единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения.

Платежи u_i и v_j не обязательно должны быть положительными: не исключено, что перевозчик сам платит либо поставщику, либо потребителю премию за перевозку.

Очевидно, что оптимальным будет такой план перевозок, при котором поставщик A_i и потребитель B_j не переплачивают перевозчику ничего сверх объективной стоимости перевозок c_{ij}, т.е. такой план, любое отступление от которого не выгодно ни поставщику, ни потребителю, так как заставит их платить за перевозку больше, чем, если бы они возили грузы сами.

Равенства $u_i + v_j = c_{ij}$ для занятых клеток образуют систему с $m+n$ неизвестными u_i и v_j, а число уравнений этой системы равно $m+n-1$ (по числу занятых клеток невырожденного плана перевозок). Так как число неизвестных системы на единицу больше числа уравнений, то одну из неизвестных можно задать произвольно, а остальные найти из системы.

Неравенства $u_i + v_j \le c_{ij}$ для свободных клеток используются для проверки оптимальности плана перевозок. Введем числа

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij},$$

которые называются *оценками*. Таким образом, согласно теореме, опорный *план перевозок будет оптимален, если для всех свободных клеток таблицы оценки неположительны.*

Если приведенное выше условие не выполняется, то построенный опорный план не является оптимальным. Чтобы его улучшить, требуется ввести понятие цикла.

Определение. Цикл – это замкнутая ломаная линия, звенья которой параллельны строкам и столбцам таблицы, а вершины лежат в занятых клетках.

Из клетки, которой соответствует наибольшая положительная оценка, начнем строить цикл, поставив в этой клетки знак «+». Вершинам цикла поочередно присваиваем знаки «+» и «–». Из объемов груза, стоящих в минусовых клетках, выбирают наименьший и обозначают через θ.

В новой таблице прибавляют θ к объемам груза в «плюсовых» клетках и вычитают θ из объемов «минусовых» клеток.

Полученный опорный план перевозок проверяем на оптимальность. Описанная процедура повторяется несколько раз, пока не будет найдено оптимальное решение.

Пример 2.

Компания владеет двумя заводами A_1, A_2. Соответствующие объемы производства равны 220 и 100 единиц продукции. Компания обязалась поставить в города B_1, B_2 и B_3 соответственно 80, 110 и 120 единиц. При заданных в таблице стоимостях перевозок единицы продукции составьте план ее распределения, чтобы общая стоимость перевозок была наименьшей

Заводы	Города		
	B_1	B_2	B_3
A_1	10	13	25
A_2	30	10	20

Решение. Построим математическую модель задачи. Пусть x_{ij} представляют собой объем продукции перевозимой с завода A_i $(i=1,2)$ в город B_j $(j=1,2,3)$.

Установим характер задачи. Поскольку суммарные запасы поставщиков $(\sum_{i=1}^{2} a_i = 220+100=320)$ больше суммарного спроса потребителей $(\sum_{j=1}^{3} b_j = 80+110+120=310)$, то заключаем, что данная задача является несбалансированной. Тогда математическая модель задачи будет записана в виде (20)

$$f(x)=10x_{11}+13x_{12}+25x_{13}+30x_{21}+10x_{22}+20x_{23}\to \min,$$
$$x_{11}+x_{12}+x_{13}\le 220,$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}\le 100,$$
$$x_{11}+x_{21}=80,$$
$$x_{12}+x_{22}=110,$$
$$x_{13}+x_{23}=120,$$
$$x_{ij}\ge 0,\quad i=1,2,\quad j=1,2,3.$$

Для решения этой задачи приведем ее к сбалансированному виду. Для этого введем фиктивного потребителя, спрос которого равен разности объемов запаса и потребления

$$b_4 = \sum_{i=1}^{2} a_i - \sum_{j=1}^{3} b_j = 320 - 310 = 10.$$

Стоимость перевозок фиктивному потребителю считается нулевой. С учетом этого математическая модель задачи примет вид

$$f(x) = 10x_{11} + 13x_{12} + 25x_{13} + 30x_{21} + 10x_{22} + 20x_{23} \to \min,$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 220,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 100,$$

$$x_{11} + x_{21} = 80,$$

$$x_{12} + x_{22} = 110,$$

$$x_{13} + x_{23} = 120,$$

$$x_{14} + x_{24} = 10,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Математическая модель стала закрытой. Перейдем к решению задачи.

Рассмотрим один из методов построения начального плана перевозок – метод минимального тарифа.

Алгоритм построения первого плана перевозок этим методом включает следующие этапы:

1) среди тарифов находится наименьший;

2) клетка с выбранным тарифом заполняется величиной, равной максимально возможному объему груза с учетом ограничений по строке и по столбцу. При этом либо весь груз вывозится от поставщика, либо полностью удовлетворяется спрос потребителя. Строка или столбец таблицы вычеркивается и в дальнейшем в распределении не участвует;

3) из оставшихся тарифов вновь находится минимальный, и процесс продолжается до тех пор, пока не будет распределен весь груз.

Если модель транспортной задачи открытая и введены фиктивный поставщик или потребитель, то распределение осуществляется сначала для действительных поставщиков и потребителей и в последнюю очередь нераспределенный груз направляется от фиктивного поставщика или к фиктивному потребителю.

Для построения начального плана перевозок построим транспортную таблицу. Число строк таблицы равно числу поставщиков в задаче, а число столбцов – числу потребителей. В правый верхний угол каждой клетки вносим тариф соответствующий перевозкам и рядом с таблице указываем запасы и спрос каждого поставщика и потребителя.

10	13	25	0	220
30	10	20	0	100
80	110	120	10	

На первом шаге построения начального плана перевозок, выберем в таблице клетку с наименьшим тарифом, не обращая внимание, на фиктивного потребителя. Если таких клеток несколько можно взять любую. Возьмем, например первую клетку в таблице с тарифом $c_{11} = 10$. Далее определяем, какое количество продукции будем перевозить с завода A_1 в город B_1, как минимальное значение между запасом поставщика A_1 и спросом потребителя B_1, то есть $x_{11} = \min\{220,\ 80\} = 80$. Следовательно, в первую клетку таблицы помещаем $x_{11} = 80$. Спрос первого города B_1 полностью удовлетворен и этот город вычеркивается из таблицы, а запас города A_1 становится 220 – 80 = 140.

10 80	13	25	0	~~220~~ 140
30	10	20	0	100
~~80~~	110	120	10	

На втором шаге опять выбираем клетку с минимальным тарифом среди тех, которые не удалили из таблицы. Таким тарифом является $c_{22} = 10$. Определяем количество продукции перевозимое с завода A_2 в город B_2, как минимум между запасом завода A_2 и потребностями города B_2, то есть $x_{22} = \min\{100, 110\} = 100$. Запас завода A_2 становится нулевым и этот завод удаляем из таблицы, а спрос города B_2 необходимо пересчитать: 110 – 100= 10.

10 80	13	25	0	~~220~~ 140
30	10 100	20	0	~~100~~
~~80~~	~~110~~ 10	120	10	

На следующем шаге все повторяется сначала и так до тех пор, пока вся продукция не будет распределена.

10 80	13 10	25	0	~~220~~ ~~140~~ 130
30	10 100	20	0	~~100~~
~~80~~	~~110~~ ~~10~~	120	10	

10 80	13 10	25 120	0	~~220~~ ~~140~~ ~~130~~ 10
30	10 100	20	0	~~100~~
~~80~~	~~110~~ ~~10~~	~~120~~	10	

10 **80**	13 **10**	25 **120**	0 **10**	~~220~~ ~~140~~ ~~130~~ ~~10~~
30	10 **100**	20	0	~~100~~
~~80~~	~~110~~ ~~10~~	~~120~~	~~10~~	

Таким образом, пришли к следующей транспортной таблице

10 **80**	13 **10**	25 **120**	0 **10**
30	10 **100**	20	0

Следовательно, начальный план перевозок имеет вид

$$X^0 = \begin{pmatrix} 80 & 10 & 120 & 10 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

стоимость перевозок при построенном плане составит

$$f(X^0) = 800 + 130 + 3000 + 1000 = 4930.$$

Найденный план перевозок проверяется на оптимальность по следующему критерию: если построенный план является оптимальным, то ему соответствует система $m+n$ (число строк плюс число столбцов) действительных чисел u_i, $i=1,2$ и v_j, $j=1,2,3,4$, удовлетворяющих условиям $u_i + v_j = c_{ij}$ для занятых клеток и $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \le 0$ для свободных клеток. Числа u_i, $i=1,2$ и v_j, $j=1,2,3,4$ называют потенциалами.

Используя первое условие критерия оптимальности, составим систему уравнений для поиска всех потенциалов в задаче

$$u_1 + v_1 = 10,$$

$$u_1 + v_2 = 13,$$

$$u_1 + v_3 = 25,$$
$$u_1 + v_4 = 0,$$
$$u_2 + v_2 = 10.$$

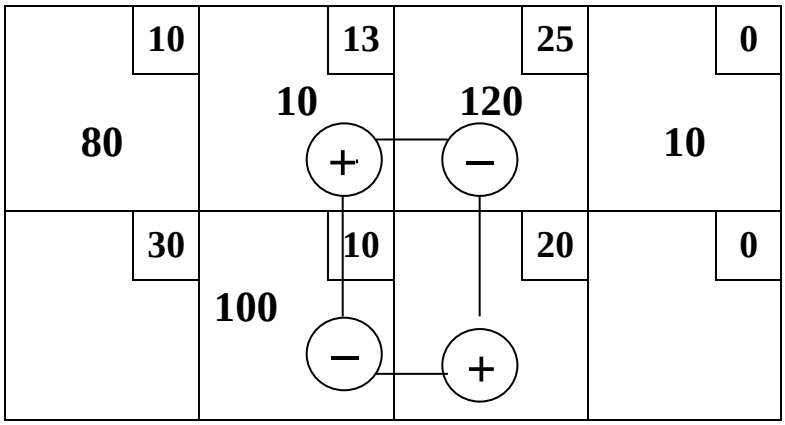
Полагаем $u_1 = 0$, тогда решение системы будет иметь вид $v_1 = 10,\ v_2 = 13,\ v_3 = 25,\ v_4 = 0,\ u_2 = -3$. Для свободных клеток вычисляем оценки

$$\Delta_{21} = -3 + 10 - 30 = -23,$$
$$\Delta_{23} = -3 + 25 - 20 = 2,$$
$$\Delta_{24} = -3 + 0 - 0 = -3.$$

Наличие положительной оценки свободной клетки ($\Delta_{23} = 2$) при проверке плана на оптимальность свидетельствует о том, что построенный план перевозок не является решением и для уменьшения стоимости перевозок надо перейти к другому плану. Для этого построим цикл начальная вершина, которого будет расположена в клетке с положительной оценкой.

Циклом называется замкнутая ломаная линия, вершины которой расположены в занятых клетках таблицы, а звенья – вдоль строк и столбцов, причем в каждой вершине цикла встречаются ровно два звена, одно из которых находится в строке, а другое – в столбце. Если ломаная линия, образующая цикл, пересекается, то точки пересечения не являются вершинами. Для каждой свободной клетки таблицы можно построить единственный цикл.

Всем вершинам цикла, начиная с вершины, находящейся в свободной клетке, присваиваются поочередно знаки «+» и «–».



Определим количество продукции, которое проведем по циклу. Для этого выбираем минимальное содержимое минусовых клеток $\min\{100,\ 120\} = 100$. Полученное значение прибавляем к количеству продукции, стоящему у положительных вершин цикла, и отнимаем от количества продукции, соответствующего отрицательным вершинам. Новый план перевозок будет иметь вид

10 **80**	13 **110**	25 **20**	0 **10**
30	10	20 **100**	0

Проверим полученный план на оптимальность. Система на поиск потенциалов имеет вид

$$u_1 + v_1 = 10,$$
$$u_1 + v_2 = 13,$$
$$u_1 + v_3 = 25,$$
$$u_1 + v_4 = 0,$$
$$u_2 + v_3 = 20.$$

Полагаем $u_1 = 0$, тогда решение системы будет иметь вид $v_1 = 10,\ v_2 = 13,\ v_3 = 25,\ v_4 = 0,\ u_2 = -5$. Для свободных клеток вычисляем оценки

$$\Delta_{21} = -5 + 10 - 30 = -25,$$
$$\Delta_{22} = -5 + 13 - 10 = -2,$$
$$\Delta_{24} = -5 + 0 - 0 = -5.$$

Все оценки свободных клеток отрицательные, следовательно, построенный план перевозок является решением задачи

$$X^* = \begin{pmatrix} 80 & 110 & 20 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

минимальная стоимость перевозок составит

$$f(X^*) = 800 + 1430 + 500 + 2000 = 4730.$$

Тест № 5 по теме «Транспортная задача»

1. Фирма «Союз» обеспечивает доставку DVD-дисков с двух складов, расположенных в разных точках города, в три магазина. Запас дисков, имеющихся на складах, а также объемы заказов магазинов и тарифы на доставку представлены в таблице

Склады	*Магазины*			*Запасы, тыс.шт.*
	№ 1	*№ 2*	*№ 3*	
Склад № 1	5	2	7	25
Склад № 2	8	3	6	30
Заказы, тыс.шт.	20	28	22	

Определите объемы перевозок, обеспечивающих их минимальные затраты. Математическая модель задачи будет иметь вид…

a) $f(x) = 5x_{11} + 2x_{12} + 7x_{13} + 8x_{21} + 3x_{22} + 6x_{23} \to \min$,

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 25,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 30,$$
$$x_{11} + x_{21} \le 20,$$
$$x_{12} + x_{22} \le 28,$$
$$x_{13} + x_{23} \le 22,$$
$$x_{ij} \ge 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3.$$

b) $f(x) = 5x_{11} + 2x_{12} + 7x_{13} + 8x_{21} + 3x_{22} + 6x_{23} \to \min$,

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 25,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 30,$$
$$x_{11} + x_{21} = 20,$$
$$x_{12} + x_{22} = 28,$$
$$x_{13} + x_{23} = 22,$$
$$x_{ij} \ge 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3.$$

c) $f(x) = 5x_{11} + 2x_{12} + 7x_{13} + 8x_{21} + 3x_{22} + 6x_{23} \to \min$,

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 25,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 30,$$
$$x_{11} + x_{21} = 20,$$
$$x_{12} + x_{22} = 28,$$
$$x_{13} + x_{23} = 22,$$
$$x_{ij} \ge 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3.$$

2. Математическая модель транспортной задачи Фирма «Союз» обеспечивает доставку DVD-дисков с двух складов, расположенных в разных точках города, в три магазина. Запас дисков, имеющихся на складах, а также объемы заказов магазинов и тарифы на доставку представлены в таблице

Склады	*Магазины*			*Запасы, тыс.шт.*
	№ 1	*№ 2*	*№ 3*	
Склад № 1	5	2	7	25+*a*
Склад № 2	8	3	6	30
Заказы, тыс.шт.	20	28	22	

Определите объемы перевозок, обеспечивающих их минимальные затраты.

При каком параметре a транспортная задача является сбалансированной?

a) $a = 15$;

b) $a = 10$;

c) $a = 20$.

3. Московский филиал фирмы The Coca-Cola Company, выпускающей газированные напитки Sprite и Coca-Cola, складируемые в разных местах, должен поставить продукцию в три крупных московских супермаркета: «Рамстор», «Седьмой континент», «Арбатский». Тарифы на доставку товара, объемы запасов и заказы на продукцию приведены в таблице

Склады	*Супермаркеты*			*Запасы, уп.*
	«Рамстор»	*«Седьмой континент»*	*«Арбатский»*	
Coca-Cola	7	5	2	25
Sprite	4	3	6	20
Заказы, уп.	15	15	15	

Определите оптимальный план поставок газированных напитков в супермаркеты города, чтобы транспортные расходы были минимальны.

Начальный план перевозок, построенный методом «минимального тарифа» будет иметь вид …

a) $X^0 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 15 \\ 5 & 15 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $X^0 = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 0 \\ 0 & 5 & 15 \end{pmatrix}$;

c) $X^0 = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 5 \\ 5 & 5 & 10 \end{pmatrix}$.

4. Автотранспортная компания «Астрада» обеспечивает доставку шин Bridgestone с двух оптовых складов, расположенных в Москве и Нижнем Новгороде в три магазина в Чебоксарах, Набережных Челнах и Казани. Объемы за-

пасов шин на складах, объемы заявок магазинов и тарифы на перевозку приведены в таблице

Склады в городах	*Магазины*			*Запасы*
	Чебоксары	*Набережные Челны*	*Казань*	
Москва	4	7	5	80
Нижний Новгород	3	5	8	20
Заявки	30	40	30	

Определите оптимальный план перевозок, обеспечивающий минимальные транспортные расходы.

Начальный план перевозок, построенный методом «северо-западного угла» будет иметь вид …

a) $X^0 = \begin{pmatrix} 30 & 40 & 10 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$;

b) $X^0 = \begin{pmatrix} 10 & 40 & 30 \\ 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

c) $X^0 = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 30 \\ 10 & 10 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Автотранспортная компания «Астрада» обеспечивает доставку шин Bridgestone с двух оптовых складов, расположенных в Москве и Нижнем Новгороде в три магазина в Чебоксарах, Набережных Челнах и Казани. Объемы запасов шин на складах, объемы заявок магазинов и тарифы на перевозку приведены в таблице

Склады в городах	*Магазины*			*Запасы*
	Чебоксары	*Набережные Челны*	*Казань*	
Москва	4	7	5	80
Нижний Новгород	3	5	8	20
Заявки	30	40	30	

Определите оптимальный план перевозок, обеспечивающий минимальные транспортные расходы.

Является ли план перевозок $X^0 = \begin{pmatrix} 30 & 40 & 10 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$ оптимальным?

a) не является оптимальным;

b) является оптимальным.

6. Московский филиал фирмы *The Coca-Cola Company*, выпускающей газированные напитки *Sprite* и *Coca-Cola*, складируемые в разных местах, должен поставить продукцию в три крупных московских супермаркета: «Рамстор», «Седьмой континент», «Арбатский». Тарифы на доставку товара, объемы запасов и заказы на продукцию приведены в таблице

Склады	*Супермаркеты*			*Запасы, уп.*
	«Рамстор»	*«Седьмой континент»*	*«Арбатский»*	
Coca-Cola	7	5	2	25
Sprite	4	3	6	20
Заказы, уп.	15	15	15	

Определите оптимальный план поставок газированных напитков в супермаркеты города, чтобы транспортные расходы были минимальны.

При проверке плана перевозок $X = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 15 \\ 5 & 15 & 0 \end{pmatrix}$ на оптимальность, оценки будут иметь вид…

a) $\Delta_{12} = 1$,

$\Delta_{23} = -7$;

b) $\Delta_{12} = 15$,

$\Delta_{23} = 4$;

c) $\Delta_{12} = 5$,

$\Delta_{23} = 6$.

7. Фирма «Московия» заключила контракт с компанией АЛРОСА («Алмазы России – Саха») на покупку промышленного золота для его реализации в трех городах: Самара, Ростов-на-Дону и Санкт-Петербург. Компания располагает двумя месторождениями – «Мирное» и «Удачный». Объемы выработки золота на каждом месторождении, заявки на реализацию и транспортные расходы приведены в таблице

Месторождения	*Магазины*			*Объем выработки*
	Самара	*Ростов-на-Дону*	*Санкт-Петербург*	
«Мирное»	8	10	6	22
«Удачный»	9	7	5	28
Заявки	20	14	16	

Определите оптимальный план перевозок золота, обеспечивающий минимальные транспортные расходы.

Для плана перевозок $X = \begin{pmatrix} 20 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & 16 \end{pmatrix}$, значение потенциала v_2 равно…

a) 10;
b) 2;
c) 12.

8. Фирма «Московия» заключила контракт с компанией АЛРОСА («Алмазы России – Саха») на покупку промышленного золота для его реализации в трех городах: Самара, Ростов-на-Дону и Санкт-Петербург. Компания располагает двумя месторождениями – «Мирное» и «Удачный». Объемы выработки золота на каждом месторождении, заявки на реализацию и транспортные расходы приведены в таблице

Месторождения	*Магазины*			*Объем выработки*
	Самара	*Ростов-на-Дону*	*Санкт-Петербург*	
«Мирное»	8	10	6	22
«Удачный»	9	7	5	28
Заявки	20	14	16	

Определите оптимальный план перевозок золота, обеспечивающий минимальные транспортные расходы.

Для плана перевозок $X = \begin{pmatrix} 20 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & 16 \end{pmatrix}$, значение потенциала u_2 равно…

a) – 3;
b) 2;
c) 7.

9. Фирма «Московия» заключила контракт с компанией АЛРОСА («Алмазы России – Саха») на покупку промышленного золота для его реализации в трех городах: Самара, Ростов-на-Дону и Санкт-Петербург. Компания располагает двумя месторождениями – «Мирное» и «Удачный». Объемы выработки зо-

лота на каждом месторождении, заявки на реализацию и транспортные расходы приведены в таблице

Месторождения	*Магазины*			*Объем выработки*
	Самара	*Ростов-на-Дону*	*Санкт-Петербург*	
«Мирное»	8	10	6	22
«Удачный»	9	7	5	28
Заявки	20	14	16	

Определите оптимальный план перевозок золота, обеспечивающий минимальные транспортные расходы.

Оптимальный план перевозок имеет вид…

a) $X^* = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 2 \\ 0 & 14 & 14 \end{pmatrix}$;

b) $X^* = \begin{pmatrix} 20 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & 16 \end{pmatrix}$;

c) $X^* = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 8 \\ 10 & 10 & 8 \end{pmatrix}$.

10. Автотранспортная компания «Астрада» обеспечивает доставку шин Bridgestone с двух оптовых складов, расположенных в Москве и Нижнем Новгороде в три магазина в Чебоксарах, Набережных Челнах и Казани. Объемы запасов шин на складах, объемы заявок магазинов и тарифы на перевозку приведены в таблице

Склады в городах	*Магазины*			*Запасы*
	Чебоксары	*Набережные Челны*	*Казань*	
Москва	4	7	5	80
Нижний Новгород	3	5	8	20
Заявки	30	40	30	

Определите оптимальный план перевозок, обеспечивающий минимальные транспортные расходы.

Минимальные транспортные расходы в этой задаче равны…

a) 510;

b) 540;

c) 490.

Решение оптимизационных задач в *MS Excel*

Оптимизационные математические модели описывают операции, в которых требуется найти оптимальное или наилучшее, в некотором смысле, решение. Оптимизационные математические модели особенно широко применяются при решении проблем менеджмента и экономики и вообще при принятии решений. Особенное место, занимаемое оптимизационными математическими моделями, обусловлено тем, что любые операции, рассматриваемые в экономике, проходят с участием человека и направлены на достижение определенной цели. Поэтому человек, осуществляющий операцию, всегда заинтересован не просто в том, чтобы достичь цели, но достичь ее самым эффективным, наилучшим или оптимальным образом с наименьшими затратами, в кратчайшее время и т.д. А поскольку для достижения поставленных в операции целей ею необходимо управлять и на каждом этапе управления принимать решения, то человек стремится вырабатывать не какие-нибудь управления, пусть даже кое-как и приводящие к цели, а наилучшие управления. Отсюда следует, что наиболее адекватным реальным проблемам менеджмента и экономики инструментом для выработки наилучших управлений и принятия наилучших решений являются оптимизационные математические модели, позволяющие находить оптимальные решения и оптимальные управления.

Для оптимизационных моделей характерно наличие целевой функции или нескольких целевых функций, которые необходимо максимизировать или минимизировать, в зависимости от содержательного смысла операции и выбранного критерия, а также наличие ограничений. Если ограничений нет, то говорят о математической модели безусловной оптимизации, при наличии ограничений – о математической модели с ограничениями. Оптимизационные модели могут быть линейными и нелинейными, иметь один критерий или много критериев (многокритериальные модели). Если число переменных оптимизационной модели или число ограничений составляет десятки, сотни, то необходимо использовать компьютерное моделирование.

Среди средств компьютерного моделирования электронные таблицы *Microsoft Excel* занимают в деятельности менеджера или экономиста особое место. Это обусловлено многими причинами:

– распространенность пакета *MS Office*, а с ним и *MS Excel* во всем мире, в том числе и в России, такова, что в какой бы организации ни работал экономист или менеджер – в госучреждении, фирме, магазине, складе, органах управления любого уровня – от государственного до муниципального – пакет *MS Excel* всегда оказывается доступным;

– работу *MS Excel* может освоить пользователь любого уровня, обладающий элементарными сведениями по информатике и навыками работы на персональном компьютере;

– *MS Excel* обладает мощными средствами подготовки документов, анализа данных и решения разнообразных задач в различных областях деятельности, таких как финансы, экономика, статистика и т.д.

Все это определило выбор именно пакета *MS Excel* как компьютерного средства моделирования и решения оптимизационных задач менеджмента и экономики. Компьютерное моделирование в среде *MS Excel* осуществляется посредством надстройки «**Поиск решения**», входящей в состав пакета *MS Excel*, включает в себя следующие шаги:

– запуск среды *Microsoft Office Excel*,

– организацию исходных данных в рабочей книге *Excel*,

– задание исходных данных математической модели,

– вызов прикладной программы «**Поиск решения**», которая должна быть установлена в *MS Excel*,

– задание в «**Поиске решения**» переменных модели, целевой функции и ограничений,

– поиск оптимального решения математической модели, осуществляемый в результате работы прикладной программы «**Поиск решения**».

Компьютерное моделирование задач линейного программирования разберем на конкретных примерах.

Задача планирования производства

Небольшая семейная фирма занимается переработкой яблок и производством из них трех видов продукции: яблочного сока, джема и яблочного пюре. Для производства сока используются яблоки только первого сорта, а для производства джема и яблочного пюре используются яблоки, как первого, так и второго сорта. На производство сока, джема и пюре затрачиваются сахарный песок и лимонная кислота. Количество яблок первого и второго сорта, сахарного песка и лимонной кислоты, которыми располагает фирма, ограниченны. Нормы расхода всех видов сырья и их запасы на складе компании приведены в таблице

Сырье	***Расход сырья (кг) на выпуск 1 кг продукции***			***Запасы сырья на складе фирмы, кг***
	сок	***джем***	***пюре***	
Яблоки 1 сорта	*3*	*6*	*4*	*2000*
Яблоки 2 сорта	*0*	*3*	*5*	*1500*
Сахарный песок	*2*	*1,5*	*2*	*1500*
Лимонная кислота	*0,1*	*0,15*	*0,2*	*74*

Глава фирмы оценил значение прибыли, которую он получит от реализации 1 кг каждого вида продукции; она составила: 60 ден. ед. для сока, 100 ден. ед. для джема и 90 ден. ед. для пюре.

Необходимо так спланировать производство продукции, т.е. определить, какую продукцию и в каком объеме следует выпускать фирме, чтобы суммарная прибыль от их реализации была максимальна.

Составим математическую модель задачи. Переменными модели являются объемы выпуска яблочного сока (x_1), джема (x_2) и яблочного пюре (x_3).

Целевая функция задачи представляет собой суммарную прибыль от реализации произведенной продукции. Прибыль от реализации единицы (1 кг) яблочного сока составляет 60 ден. ед., а если сок будет произведен в объеме x_1 кг, то прибыль от реализации этого количества сока будет равна произведению 60 x_1 ден. ед. Аналогично, прибыль от реализации джема и пюре, выпущенных в количестве x_2 и x_3 кг, составит $100x_2$ и $90x_3$ ден. ед. Тогда суммарная прибыль от реализации произведенных объемов сока, джема и пюре будет равна сумме $60x_1 + 100x_2 + 90x_3$ ден. ед., которую по условию задачи надо сделать как можно больше. Таким образом, целевая функция запишется в виде

$$f(x) = 60x_1 + 100x_2 + 90x_3 \to \max.$$

Конечные запасы каждого вида сырья ограничивают их расход при производстве всех видов продукции. Выразим расход каждого вида сырья через переменные задачи. Начнем с первого вида сырья – яблок 1 сорта.

На производство 1 кг сока расходуется 3 кг яблок 1 сорта. Если сок будет выпущен в количестве x_1 кг, то на это количество сока будет израсходовано $3x_1$ кг яблок 1 сорта. Аналогично, если джем и пюре будут выпущены в количестве x_2 и x_3 кг, то на их выпуск яблок 1 сорта будет затрачено в количестве $6x_2$ и $4x_3$ кг. Суммарный расход яблок 1 сорта на выпуск сока, джема и пюре в количестве x_1, x_2 и x_3 кг соответственно составит $3x_1 + 6x_2 + 4x_3$ кг, и это количество не должно превышать запаса яблок 1 сорта равного 2000 кг. Поэтому первое ограничение на расход яблок 1 сорта запишется в виде

$$3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \le 2000.$$

Аналогичные рассуждения приводят к следующим ограничениям на расход сырья при производстве сока, джема и пюре

– яблоки 2 сорта

$$3x_2 + 5x_3 \le 1500,$$

– сахарный песок

$$2x_1 + 1,5x_2 + 2x_3 \le 1500,$$

– лимонная кислота

$$0,1x_1 + 0,15x_2 + 0,2x_3 \le 74.$$

И наконец, объемы производства сока, джема и пюре не могут быть отрицательными, хотя и могут быть равными нулю. Это условие добавляет следующие ограничения на объемы выпуска продукции

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Таким образом, оптимизационная математическая модель, описывающая объемы производства сока, джема и пюре при условии выполнения ограничений на расход ресурсов имеет вид

$$f(x) = 60x_1 + 100x_2 + 90x_3 \to \max,$$
$$3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 2000,$$
$$3x_2 + 5x_3 \leq 1500,$$
$$2x_1 + 1,5x_2 + 2x_3 \leq 1500,$$
$$0,1x_1 + 0,15x_2 + 0,2x_3 \leq 74,$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

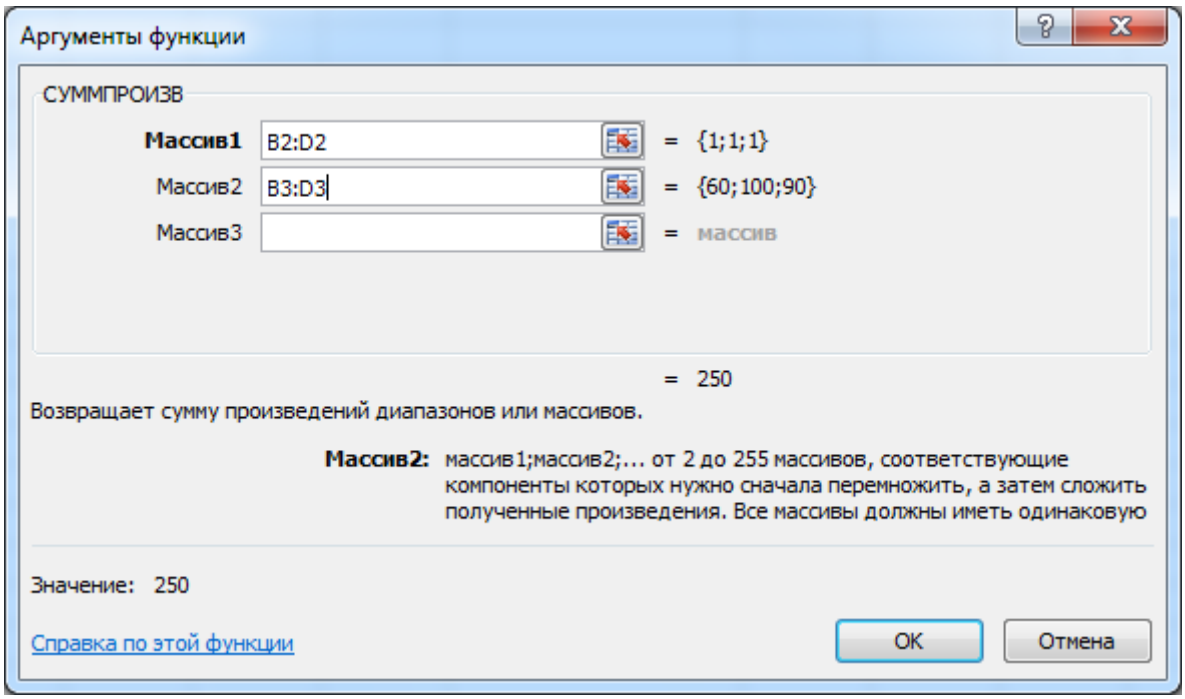
После того как оптимизационная модель построена, необходимо решить ее, другими словами, найти оптимальные значения объемов производства сока, джема и пюре, при которых прибыль от их реализации будет максимальной и которые удовлетворят всем ограничениям-неравенствам.

Создадим аналог этой модели в среде *MS Excel*. Для этого на лист, который назовем «Оптимальное производство» занесем все исходные данные, сформировав две таблицы, как показано на рисунке

	A	B	C	D	E	F	G
1	*Продукция*	*Сок*	*Джем*	*Пюре*	*Суммарная прибыль*		
2	*Оптимальное производство*	1	1	1			
3	*Прибыль от 1 кг*	60	100	90			
4							
5							
6	*Сырье*	*Расход сырья на 1 кг*			*Суммарный расход*	*Запас*	
7	*Яблоки 1 сорта*	3	6	4		2000	
8	*Яблоки 2 сорта*	0	3	5		1500	
9	*Сахарный песок*	2	1,5	2		1500	
10	*Лимонная кислота*	0,1	0,15	0,2		74	
11							
12							
13							

В ячейки B2, C2, D2 введем начальный план выпуска сока, джема и пюре, здесь он задан единицами, поскольку при решении задач от начальных значений переменных не зависит ни оптимальное решение, ни время его поиска. В ячейки B3, C3, D3 запишем прибыль одного килограмма выпускаемой продукции и на основании этих двух строк подсчитаем значение целевой функции, а

именно суммарную прибыль от реализации килограмма сока, килограмма джема и килограмма пюре. Для этого воспользуемся функцией СУММПРОИЗВ. Для того чтобы воспользоваться этой функций, установим курсор в ячейку E2 и выберем в меню вкладку **Формулы,** а далее **Математические**. В появившемся окне выбираем искомую функцию СУММПРОИЗВ.



Для формирования суммарной прибыли заполним поле Массив 1, выделив ячейки B2, C2, D2 курсором, а для поля Массив 2, ячейки B3, C3, D3, как показано на рисунке.

После нажатия кнопки *ОК*, в ячейке E2 увидим суммарную прибыль полученную от реализации килограмма сока, килограмма джема и килограмма пюре. Другими словами, значение целевой функции при $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ и $x_3 = 1$.

Теперь аналогичным образом, отразим во второй таблице суммарный расход сырья для производства продукции. Таким образом, получим следующие формулы:

– в ячейке E7 реализована функция СУММПРОИЗВ(B2:D2;B7:D7);

– в ячейке E8 реализована функция СУММПРОИЗВ(B2:D2;B8:D8);

– в ячейке E9 реализована функция СУММПРОИЗВ(B2:D2;B9:D9);

– в ячейке E10 реализована функция СУММПРОИЗВ(B2:D2;B10:D10);

В этих ячейках указан суммарный расход яблок 1 сорта, яблок 2 сорта, сахарного песка и лимонной кислоты для любого набора выпускаемой продукции.

	A	B	C	D	E	F	G
1	*Продукция*	*Сок*	*Джем*	*Пюре*	*Суммарная прибыль*		
2	*Оптимальное производство*	1	1	1	250		
3	*Прибыль от 1 кг*	60	100	90			
4							
5							
6	*Сырье*	*Расход сырья на 1 кг*			*Суммарный расход*	*Запас*	
7	*Яблоки 1 сорта*	3	6	4	13	2000	
8	*Яблоки 2 сорта*	0	3	5	8	1500	
9	*Сахарный песок*	2	1,5	2	5,5	1500	
10	*Лимонная кислота*	0,1	0,15	0,2	0,45	74	
11							
12							
13							

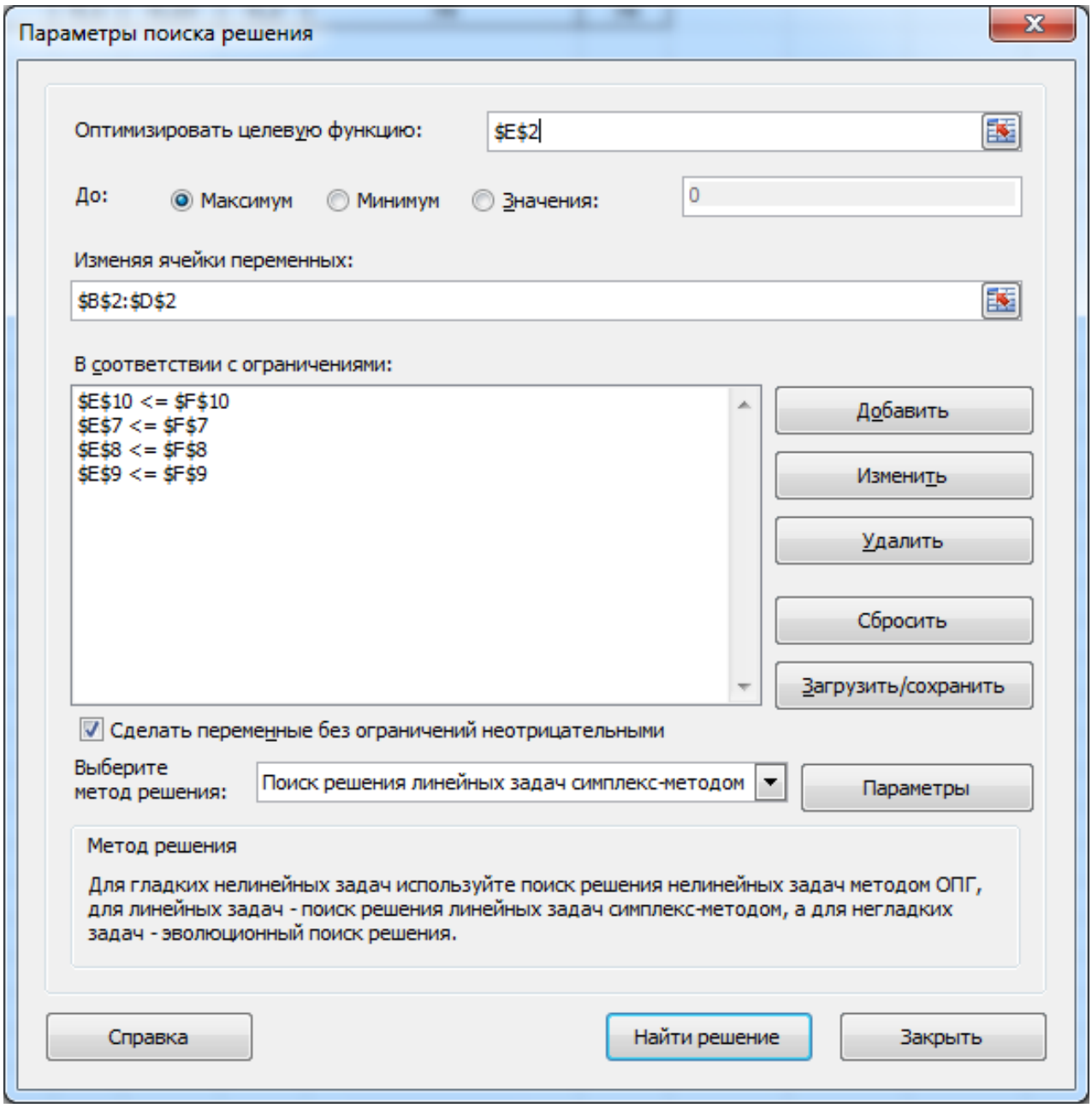
Для поиска оптимального решения в меню выберем вкладку **Данные** и в этой вкладке активизируем надстройку **Поиск решения**. Рассмотрим поподробнее процесс создания компьютерной модели задачи.

В поле ***Оптимизировать целевую ячейку*** должен находиться адрес ячейки содержащие суммарную прибыль, а именно E2. Содержимое этой ячейки можно максимизировать, минимизировать или для нее можно задать какое-либо постоянное значение. В рамках рассматриваемой задачи на поиск максимальной прибыли, выделяем значение *Максимум*.

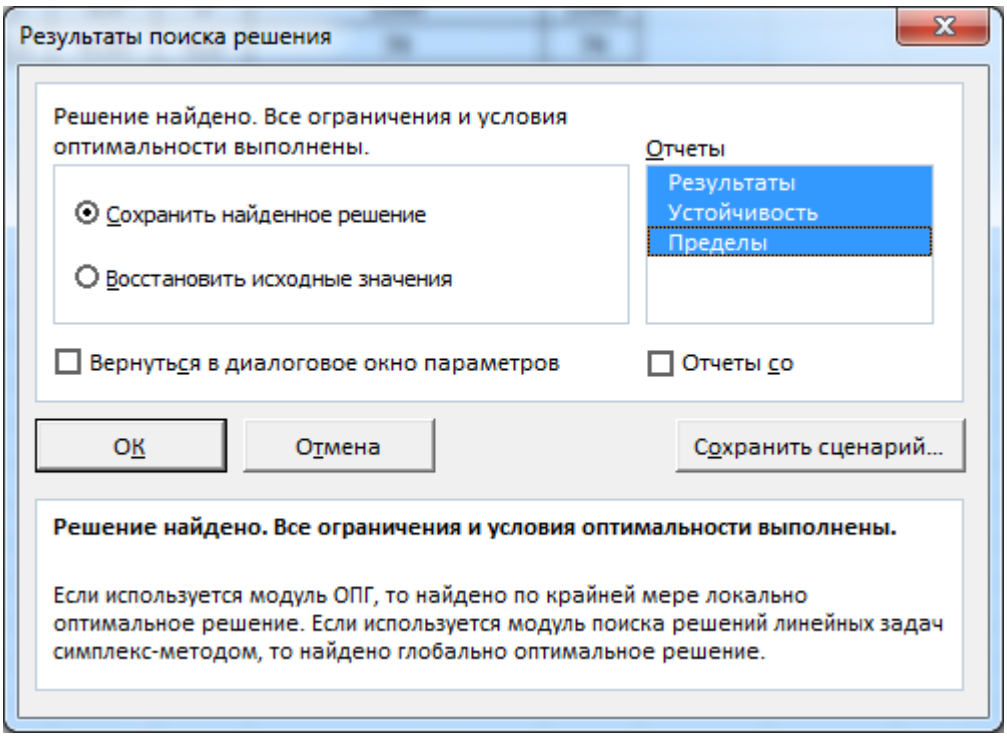
Активизировав поле ***Изменяя ячейки переменных***, с помощью курсора вводим ячейки B2:D2, которые отвечают за оптимальное количество продкуции. Значения этих ячеек будут изменяться в процессе поиска оптимального решения.

Следующим этапом опишем основные ограничения рассматриваемой задачи. Для этого активизируем поле ***В соответствии с ограничениями***, нажав кнопку *Добавить*. Эта кнопка служит для отображения окна ***Добавление ограничения***. В поле ***Ссылка на ячейки*** запишем ячейку содержащую расход яблок 1 сорта на килограмм выпускаемой продукции, то есть ячейку E7. В поле ***Ограничение*** запишем общие запасы яблок 1 сорта в фирме, то есть ячейку F7. Согласно построенной модели расход ресурса не превосходит его запас, следовательно, неравенство формирует знак «≤».

Аналогично опишем ограничения соответствующие яблокам 2 сорта, сахарному песку и лимонной кислоте. Активизируем условие ***Сделать переменные без ограничений неотрицательными*** и выберем метод решения задачи. Для решения линейных задач программа предлагает воспользоваться симплекс-методом. Для выбора этого метода нужно воспользоваться опцией висячего меню. В результате заполнения всех полей и внесения всех ограничений в диалоговое окно **Поиск решений** задача примет вид



Запустим вычислительный процесс поиска оптимального решения с помощью кнопки ***Найти решение***. После нахождения оптимального плана производства на экране появится окно **Результаты поиска решения**, в котором предлагается выбрать тип отчета: результаты, устойчивость, пределы, а также элементы *Сохранить найденное решение* или *Восстановить исходные значения*.



После нажатия кнопки *ОК* в книге добавляется по листу на каждый из выбранных типов отчета: «Отчет по результатам», «Отчет по устойчивости» и «Отчет по пределам». Результаты поиска решения приведены на рисунке.

	A	B	C	D	E	F	G
1	*Продукция*	*Сок*	*Джем*	*Пюре*	*Суммарная прибыль*		
2	*Оптимальное производство*	520	0	110	41100		
3	*Прибыль от 1 кг*	60	100	90			
4							
5							
6	*Сырье*	*Расход сырья на 1 кг*			*Суммарный расход*	*Запас*	
7	*Яблоки 1 сорта*	3	6	4	2000	2000	
8	*Яблоки 2 сорта*	0	3	5	550	1500	
9	*Сахарный песок*	2	1,5	2	1260	1500	
10	*Лимонная кислота*	0,1	0,15	0,2	74	74	
11							
12							
13							

В ячейках B2, C2, D2 найдено оптимальное производство сока, джема и пюре $x_1^* = 520$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 110$, то есть семейной фирме необходимо реализовать, с целью получения максимальной прибыли в размере 41100 ден. ед. (ячейка E2), 520 кг яблочного сока и 110 кг яблочного пюре. Также анализируя, вторую таблицу видим, что яблоки 1 сорта и лимонная кислота являются дефицитными ресурсами, то есть используются полностью на производстве в количестве 2000 и 74 кг соответственно. Яблоки 2 сорта и сахарный песок же исполь-

зуется в количестве 550 и 1260 кг соответственно, что составляет только часть общего количества сырья, которое имеется в наличии. Следовательно, это сырье является недефицитным.

На основании сформированных отчетов проведем более полный анализ результатов расчетов компьютерной модели.

«**Отчет по результатам**» состоит из трех таблиц:

Microsoft Excel 14.0 Отчет о результатах

Ячейка целевой функции (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение
$E$2	Оптимальное производство	250	41100

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное
$B$2	Сок	1	520	Продолжить
$C$2	Джем	1	0	Продолжить
$D$2	Пюре	1	110	Продолжить

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск
$E$10	Лимонная кислота	74	$E$10<=$F$10	Привязка	0
$E$7	Яблоки 1 сорта	2000	$E$7<=$F$7	Привязка	0
$E$8	Яблоки 2 сорта	550	$E$8<=$F$8	Без привязки	950
$E$9	Сахарный песок	1260	$E$9<=$F$9	Без привязки	240

– «*Ячейка целевой функции*»: содержит исходное и окончательное значение целевой функции. В рамках представленной задачи окончательное значение представляет собой максимальную суммарную прибыль от реализации продукции, что составляет 41100 ден. ед.

– «*Ячейки переменных*»: содержит исходное, окончательное значение переменных и указание к вычислению целочисленного решения. В рамках рассматриваемой задачи оптимальное производство состоит из 520 кг яблочного сока и 110 кг яблочного пюре, джем выпускать согласно оптимальному плану не целесообразно.

– «*Ограничения*»: содержит результаты оптимального решения для ограничений задачи. Она состоит из значений левых частей основных ограничений задачи, зависимостей между ячейками, которые формируют эти ограничения, а также разницей между значениями правой и левой части ограничений. Эта разница записывается в таблице в столбце *Допуск* и, исходя из экономического смысла задач, означает количество сырья, которые не используются на произ-

водстве. В рассматриваемой задаче, как уже было отмечено ранее ингредиенты лимонная кислота и яблоки 1 сорта являются дефицитными ресурсами, поскольку они используются полностью, их *Допуск* равен нулю. В столбце *Состояние* этим ресурсам соответствует *привязка*, что означает равенство значений правых и левых частей ограничений. Яблоки 2 сорта и сахарный песок являются недефицитными ресурсами, их остаток при оптимальном решении составляет 950 и 240 кг, а *Состояние* является *без привязки*, так общий запас превосходит общий расход на изготовление продукции.

«**Отчет по пределам**» состоит из двух таблиц:

Microsoft Excel 14.0 Отчет о пределах

Целевая функция		
Ячейка	Имя	Значение
$E$2	Оптимальное производство	41100

Переменная			Нижний	Целевая функция	Верхний	Целевая функция
Ячейка	Имя	Значение	Предел	Результат	Предел	Результат
$B$2	Сок	520	0	9900	520	41100
$C$2	Джем	0	0	41100	0	41100
$D$2	Пюре	110	0	31200	110	41100

Первая таблица в комментариях не нуждается, так как описывает оптимальное производство яблочной продукции. Вторая таблица указывает верхний и нижний предел значений переменных в задаче и указывает изменения значения целевой функции. Другими словами, если согласно этой таблице проанализируем яблочный сок, то видим что нижний предел этой продукции равен нулю ($x_1 = 0$), при таком значении переменной прибыль от реализации оставшейся продукции составит

$$f(x) = 0 \cdot 60 + 0 \cdot 100 + 110 \cdot 90 = 9900.$$

Если же яблочный сок будем реализовывать в количестве 520 кг (оптимальное количество), получим максимальную прибыль в размере 41100 ден. ед. Аналогично можно провести рассуждения для джема+ и яблочного пюре.

«**Отчет по устойчивости**» состоит из двух таблиц:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Microsoft Excel 14.0 Отчет об устойчивости**							
2								
3	Ячейки переменных							
4				**Окончательное**	**Приведенн.**	**Целевая функция**	**Допустимое**	**Допустимое**
5		**Ячейка**	**Имя**	**Значение**	**Стоимость**	**Коэффициент**	**Увеличение**	**Уменьшение**
6		$B$2	Сок	520	0	60	7,5	4,2
7		$C$2	Джем	0	-12,5	100	12,5	1E+30
8		$D$2	Пюре	110	0	90	16,7	10
9								
10	Ограничения							
11				**Окончательное**	**Тень**	**Ограничение**	**Допустимое**	**Допустимое**
12		**Ячейка**	**Имя**	**Значение**	**Цена**	**Правая сторона**	**Увеличение**	**Уменьшение**
13		$E$10	Лимонная кислота	74	150	74	13	7
14		$E$7	Яблоки 1 сорта	2000	15	2000	220	380
15		$E$8	Яблоки 2 сорта	550	0	1500	1E+30	950
16		$E$9	Сахарный песок	1260	0	1500	1E+30	240
17								

Первая таблица «*Ячейки переменных*» связана с устойчивостью оптимального решения задачи. Рассмотрим более подробно всю представленную в ней информацию.

– «*Окончательное значение*» отражено найденное оптимальное решение задачи.

– «*Приведенная стоимость*» показывает, насколько изменится максимальная прибыль в задаче в случае принудительного включения единицы нерентабельного продукта в оптимальное решение. В рассмотренном примере джем являются нерентабельной продукцией, следовательно, при производстве одного килограмма джема максимальный суммарный доход от реализации продукции уменьшится на 12,5 ден. ед.

– «*Целевая функция. Коэффициент*» содержит стоимость одного килограмма сока, джема и пюре.

– «*Допустимое увеличение*», «*Допустимое уменьшение*» указывает максимально возможное увеличение и уменьшение стоимости соответствующей продукции, при сохранении уровня цен остальных видов продукции, которые не приведут к изменению найденного оптимального решения задачи.

Вторая таблица «*Ограничения*» содержит информацию, относящуюся к ограничениям задачи.

– «*Окончательное значение*» указано количество сырья, которые используются на производстве для реализации оптимального решения.

– «*Теневая цена*» приведены двойственные оценки ресурсов. В литературе эти оценки называют «внутренняя цена», «условная стоимость», «скрытый доход» или «объективно обусловленными оценками». Эти оценки показывают,

на сколько денежных единиц изменится максимальный доход от реализации продукции при изменении запаса соответствующего ресурса на единицу.

– «*Ограничение. Правая сторона*» отражают количество каждого ресурса, которое имеется в наличие. Другими словами, правую часть основных ограничений задачи, описывающих использование ресурсов на производстве.

– «*Допустимое увеличение*», «*Допустимое уменьшение*» указаны предельные значения приращения ресурсов, то есть насколько можно уменьшить (устранить излишек) или увеличить (повысить минимально необходимое требование) ресурс, сохранив при этом структуру оптимального решения.

Таким образом, пользуясь отчетом по устойчивости, можно провести постоптимальный анализ задачи, а именно:

– провести анализ устойчивости полученного решения при изменении стоимости продукции каждого вида;

– определить степень дефицитности ресурсов;

– установить устойчивость оптимального решения или оптимальных двойственных оценок ресурсов при изменении количества каждого ресурса;

– установить, как измениться максимальная прибыль при изменении запасов ресурсов на единицу;

– построить функции предельной эффективности ресурсов, а также найти зависимость максимальной прибыли от количества сырья, используемого на производстве.

Проанализируем данные полученные в отчете по устойчивости в рамках рассматриваемого примера. Опираясь на первую таблицу, оптимальное производство продукции представляет собой вектор $x^* = (520, 0, 110)$, а максимальная прибыль, как было найдено ранее, составляет 41100 ден. ед. Из первой строки следует, что полученное решение сохранится, если текущая стоимость яблочного сока 60 ден. ед. может максимально увеличиться на 7,5 ден. ед. (до 67,5 ден. ед.) или уменьшиться максимально на 4,2 ден. ед. (до 55,8 ден. ед.). Другими словами, диапазон изменения стоимости килограмма яблочного сока [55,8; 67,5] ден. ед. является диапазоном устойчивости найденного оптимального решения $x^* = (520, 0, 110)$. Из второй строки следует, что полученное решение сохранится, если текущая стоимость джема 100 ден. ед. может максимально увеличиться на 12,5 ден. ед. (до 112,5 ден. ед.) или уменьшиться на любую величину (1E+30 означает бесконечно большое число). Другими словами, пока стоимость одного килограмма джема не превосходит 112,5 ден. ед. оптимальное решение $x^* = (520, 0, 110)$ не изменится. Аналогично, опираясь на третью строку таблицы, получаем диапазон изменения стоимости яблочного пюре. Текущая цена 90 ден. ед. может быть максимально увеличена на 16,7 ден. ед. или максимально уменьшена на 10 ден. ед., что не приведет к изменению оптимального производства шоколада. Таким образом, диапазон устойчивости

найденного решения при изменении стоимость яблочного пюре составит [80; 106,7] ден. ед.

Исследуем характер основных ограничений в задаче. Решением двойственной задачи для рассматриваемого примера, является вектор $y^* = (150,\ 15,\ 0,\ 0)$. Переменные $y_1^* = 150,\ y_2^* = 15,\ y_3^* = 0,\ y_4^* = 0$ соответствуют значениям, которые стоят в столбце «*Теневая цена*». Отличные от нуля двойственные переменные соответствуют дефицитным ресурсам, а нулевые чаще всего недефицитным.

Вернемся к первой таблице, а именно к столбцу «*Приведенная стоимость*». Здесь отражаются потери прибыли при выпуске одного килограмма продукции, то есть

$$\begin{matrix}\textit{Приведенная}\\ \textit{стоимость}\end{matrix} = c_j - a_{1j}y_1^* - \ldots - a_{ij}y_i^* - \ldots - a_{mj}y_m^*.$$

Согласно найденным двойственным оценкам ресурсов получаем:

$$\begin{matrix}\textit{Приведенная стоимость}\\ \textit{яблочного сока}\end{matrix} = 60 - 3\cdot 15 - 0\cdot 0 - 2\cdot 0 - 0{,}1\cdot 150 = 0,$$

$$\begin{matrix}\textit{Приведенная стоимость}\\ \textit{яблочного джем}\end{matrix} = 100 - 6\cdot 15 - 3\cdot 0 - 1{,}5\cdot 0 - 0{,}15\cdot 150 = -12{,}5,$$

$$\begin{matrix}\textit{Приведенная стоимость}\\ \textit{яблочного пюре}\end{matrix} = 90 - 4\cdot 15 - 5\cdot 0 - 2\cdot 0 - 0{,}2\cdot 150 = 0$$

Это означает, что по выпускаемой продукции потери прибыли являются нулевыми, что и представлено в отчете.

Вернемся ко второй таблице. Анализируя, первый и третий столбец, видно, что лимонная кислота и яблоки 1 сорта являются дефицитными ресурсами, так как весь запас сырья, который имеется в наличии, используется на производстве. Яблоки 2 сорта и сахарный песок используется не полностью, при запасе в 1500 кг используется только 550 кг яблок 2 сорта и 1260 кг сахарного песка, что подтверждает нулевая теневая цена этого сырья, отражая его недефицитность. Поскольку лимонная кислота и яблоки 1 сорта являются дефицитными ресурсами, то любое изменение количества сырья приведет к изменению оптимального решения задачи. Таким образом, используя последние столбцы таблицы, найдем диапазоны устойчивости структуры оптимального решения (ассортимента предлагаемой продукции) и как следствие, диапазоны устойчивости двойственных оценок при изменении количества сырья.

Опираясь на первую строчку, получаем, что количество лимонной кислоты в 74 кг можно максимально увеличить на 13 кг (до 87 кг) или максимально уменьшить на 7 кг (до 67 кг), при этом ценность ресурсов и ассортимент производимого продукции не изменится. Другими словами, диапазон изменения количества лимонной кислоты (67; 87) кг является диапазоном устойчивости двойственных оценок ресурсов. Аналогично, количество яблок 1 сорта в 2000 кг можно максимально увеличить на 220 кг или максимально уменьшить на 380 кг с сохранением структуры оптимального решения и ценности ресурсов. Таким образом, диапазон изменения количества яблок 1 сорта (1620; 2220) кг является диапазоном устойчивости двойственных оценок ресурсов.

Поскольку яблоки 2 сорта является недефицитным ингредиентом, то при любом увеличении (1E+30 означает бесконечно большое число) и уменьшении максимально на 950 кг оптимальное решение задачи не изменится, что как следствие сохраняет максимальную прибыль задачи. Таким образом, диапазон изменения яблок 2 сорта $(550;\ +\infty)$ кг является диапазоном устойчивости двойственных оценок ресурсов. Аналогично рассуждая, получим диапазон изменения сахарного песка $(1260;\ +\infty)$ при котором сохраняются двойственные оценки ресурсов.

Переменные $y_1^* = 150,\ y_2^* = 15,\ y_3^* = 0,\ y_4^* = 0$ показывают не только дефицитность и недефицитность используемых ресурсов, но и, как было отмечено ранее, характеризуют ценность одной единицы ресурса в смысле увеличения прибыли. Следовательно, при увеличении лимонной кислоты на один килограмм суммарная прибыль увеличится на 150 ден. ед., а при увеличении яблок 1 сорта на один килограмм прибыль возрастет на 15 ден. ед. Поскольку яблоки 2 сорта и сахарный песок является недефицитными ресурсам, то их увеличение не отражается на суммарном доходе.

Образец выполнения расчетно-графической работы

Небольшая кофейня в центре города самостоятельно закупает кофейные зерна, взбитые сливки и молоко для изготовления вкуснейших кофейных напитков. Нормы затрат на производство одной чашки кофе и объем используемых ресурсов приведены в таблице

Ресурсы	***Норма расхода ресурсов на одну чашку кофе***			Запас ресурсов
	Капучино	***Эспрессо***	***Кофе-латте***	
Кофейные зерна	4	1	2	100
Взбитые сливки	4	1	1	70
Молоко	2	1	1	150
Стоимость одной чашки (ден. ед.)	60	50	80	

Задание.

1. Определить в каком объеме следует производить кофе, чтобы доход был максимальный.

2. Объясните смысл данных отчета по результатам и устойчивости.

3. Изменится ли оптимальный план выпуска и прибыль, если стоимость одной чашки «Эспрессо» увеличится на 20 ден. ед.иниц?

4. Как повлияет на прибыль уменьшение запасов кофейных зерен на 2 единицы?

5. Изменится ли оптимальный план выпуска и прибыль, если стоимость одной чашки «Капучино» будет равна 100 ден. ед.иниц?

Построим математическую модель задачи. Для этого надо определить переменные задачи, целевую функцию и ограничения, которым удовлетворяют переменные. Обозначим через x_1, x_2 и x_3 – количество чашек кофе каждого вида, планируемое к производству. Тогда математическая модель задачи будет иметь вид

$$f(x) = 60x_1 + 50x_2 + 80x_3 \to \max,$$
$$4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 100,$$
$$4x_1 + x_2 + x_3 \le 70,$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \le 150,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$$

Табличная модель задачи.

Кофе	**Капучино**	**Эспрессо**	**Кофе-латте**	Суммарный доход
План выпуска	0	40	30	
Стоимость	60	50	80	4400

Ресурсы	Расход ресурсов на одну чашку кофе			Суммарные затраты ресурсов	Запас ресурсов
Кофейные зерна	4	1	2	100	100
Взбитые сливки	4	1	1	70	70
Молоко	2	1	1	70	150

Комментарии к отчету по результатам

Ячейка целевой функции (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение
$E$3	Суммарная доход	190	4400

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное
$B$2	Капучино	1	0	Продолжить
$C$2	Эспрессо	1	40	Продолжить
$D$2	Кофе-латте	1	30	Продолжить

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск
$E$6	Кофейные зерна	100	$E$6<=$F$6	Привязка	0
$E$7	Взбитые сливки	70	$E$7<=$F$7	Привязка	0
$E$8	Молоко	70	$E$8<=$F$8	Без привязки	80

В первой таблице выводятся сведения о целевой функции. В столбце **Исходное значение** приведено значение целевой функции до начала вычислений, в столбце **Окончательное значение** – после оптимизации.

Следующая таблица содержит значения искомых переменных (изменяемых ячеек) до и после решения задачи.

Последняя таблица показывает значения левых частей ограничений на оптимальном плане задачи. В столбце **Формула** приведены зависимости, которые были введены в диалоговом окне **Поиск решения,** в столбце **Допуск** показано количество неиспользованного ресурса. Если ресурс дефицитен, то есть используется полностью, то в столбце **Состояние** указывается *привязка* (соответствующее ограничение активно); при неполном использовании ресурса в этом столбце указывается *без привязки* (ограничение не активно).

Из отчета по результатам применительно к нашей задаче видим, что оптимальный план производства состоит в выпуске 40 чашек кофе «Эспрессо» и 30 чашек «Кофе – латте», а кофе «Капучино» выпускать не выгодно. Таким образом, $x^* = (0, 40, 30)$, при этом максимальный суммарный доход составит $f(x^*) = 4400$ ден. ед. При этом кофейные зерна и взбитые сливки используется полностью, то есть является дефицитным, а молоко используется на производстве не полностью и его остаток равен 80 единиц.

Комментарии к отчету по устойчивости

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$2	Капучино	0	-140	60	140	1E+30
$C$2	Эспрессо	40	0	50	30	10
$D$2	Кофе-латте	30	0	80	20	30

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$E$6	Кофейные зерна	100	30	100	40	30
$E$7	Взбитые сливки	70	20	70	30	20
$E$8	Молоко	70	0	150	1E+30	80

В первой таблице (Изменяемые ячейки) приводится следующая информация о переменных:

– окончательное значение – оптимальные значения переменных (0, 40, 30);

– приведенная стоимость – ее величина равна значению соответствующей симплексной оценки с противоположным знаком. Для невыпускаемой продукции приведенная стоимость показывает, насколько изменится целевая функция при принудительном включении единицы этой продукции в оптимальный план производства;

– коэффициенты целевой функции (60, 50, 80);

– предельные значения приращения коэффициентов целевой функции, которые показывают, на сколько можно увеличить и уменьшить каждый целевой коэффициент в отдельности, сохраняя при этом оптимальные значения переменных.

Во второй таблице (Ограничения) приводятся аналогичные значения для ограничений задачи:

– величины использованных ресурсов (левые части ограничений) при оптимальном плане выпуска продукции;

– теневые цены, то есть оптимальные значения двойственных переменных, которые показывают, как изменится целевая функция при изменении соответствующего запаса ресурса на единицу;

– исходные запасы ресурсов (правые части ограничений);

– предельные значения приращений ресурсов (их допустимое увеличение и уменьшение), при которых сохраняется оптимальный план двойственной задачи и базисный набор переменных, входящих в оптимальное решение исходной задачи (ассортимент выпускаемой продукции).

Используем результаты отчета по устойчивости для проведения анализа в нашей задаче.

Исследуем сначала влияние на оптимальный план изменений коэффициентов целевой функции – цен реализации продукции.

Из первой таблицы следует, что оптимальный план $x^* = (0, 40, 30)$ не изменится, если первоначальная цена $c_1 = 60$ ден. ед. за одну чашку кофе «Капучино» увеличится на 140 ден. ед. В то же время любое уменьшение цены не влияет на оптимальный план производства, так как число 1E+30 равно 10^{30}, то есть практически является бесконечно большим числом. Другими словами, условие сохранения оптимального плана x^* при изменении стоимости одной чашки кофе «Капучино» имеет вид: $c_1 \le 200$.

При изменении цены $c_2 = 50$ за чашку кофе «Эспрессо» ранее найденный план $x^* = (0, 40, 30)$ останется оптимальным, если исходная цена уменьшится на 10 ден. ед. или увеличиться на 30 ден. ед. Таким образом, условие сохранения оптимального плана имеет вид: $40 \le c_2 \le 80$.

Аналогично при изменении цены $c_3 = 80$ за чашку «Кофе – латте» ранее найденный план $x^* = (0, 40, 30)$ останется оптимальным, если исходная цена уменьшится на 30 ден. ед. или увеличиться на 20 ден. ед. Таким образом, условие сохранения оптимального плана имеет вид: $50 \le c_3 \le 100$.

Оценим теперь влияние на оптимальный план x^* изменение правых частей – запасов ресурсов. Интерпретация данных второй таблицы отчета зависит от того, является ли исследуемое ограничение связанным или нет. Если ограничение не связанное, то соответствующий ему ресурс недефицитен и уменьшение его запаса на величину, не превышающую избытка, не влияет на план выпуска x^*. Тем более не изменяет оптимальный план увеличение запаса недефицитного ресурса, приводя только к возрастанию неизрасходованного остатка. Если же ограничение – связанное, то есть соответствующий ресурс дефицитен и расходуется полностью, то любое изменение его запаса изменяет объем выпускаемой продукции. Единственное, что можно определить в данном случае, это диапазон изменения запаса ресурса, гарантирующий сохранение прежнего ассортимента выпускаемой продукции.

О дефицитности ресурса можно судить либо по статусу ограничения в третьей таблице отчета о результатах, либо по значению теневой цены из второй таблицы отчета по устойчивости – дефицитный ресурс имеет положительную теневую цену, а недефицитный – нулевую.

Оптимальный план производства $x^* = (0, 40, 30)$ не изменится, если:

– Теневая цена кофейных зерен равна 30, следовательно, ресурс является дефицитным, поэтому найдем диапазон его изменения, при котором сохраняет-

ся состав базисных переменных оптимального плана производства. Запас этого ресурса может быть уменьшен на 30 ед. или увеличен на величину в 40 ед. Таким образом, условие сохранения ассортимента выпускаемой продукции имеет вид: $70 < b_1 < 140$. Это означает, что если запас ресурса изменяется в указанных пределах, то по оптимальному плану надо готовить только кофе «Эспрессо» и «Кофе – латте», но уже в другом количестве.

– Аналогично теневая цена взбитых сливок равна 20, следовательно, ресурс является дефицитным. Запас этого ресурса может быть уменьшен на 20 ед. или увеличен на величину в 30 ед. Таким образом, условие сохранения ассортимента выпускаемой продукции имеет вид: $50 < b_2 < 100$.

– Поскольку теневая цена молока равна нулю, то он является недефицитным. Запас этого ресурса может быть увеличен на любое сколь угодно большое число или уменьшен на величину в 80 ед. Таким образом, условие сохранения оптимального плана x^* имеет вид: $b_3 \geq 70$.

Напомним, что теневая цена ресурса численно равна изменению оптимального значения целевой функции при увеличении (уменьшении) запаса данного ресурса на единицу. Как видно из таблицы, теневая цена кофейных зерен равна $y_1^* = 30$, а взбитых сливок $y_2^* = 20$. Следовательно, привлечение дополнительной единицы кофейных зерен приведет к увеличению суммарного дохода на 30 ден.ед, а привлечение единицы взбитых сливок приведет к увеличению на 20 ден. ед. Увеличение запаса молока (теневая цена $y_3^* = 0$) не влияет на суммарный доход.

Представленный отчет по устойчивости дает возможность выполнить задания 3, 4 и 5, приведенные в задаче.

Задание 3.

Предположим, что стоимость одной чашки кофе «Эспрессо» увеличится на 20 ден. ед. и станет равна 70 ден. ед. Согласно отчету по устойчивости стоимость чашки «Эспрессо» может изменяться в пределах от 40 до 80 ден. ед. и при этом оптимальный план не измениться. Поскольку новая стоимость попадает в представленный диапазон, то оптимальный план $x^* = (0, 40, 30)$ сохранится, но суммарный доход при изменении цены на рентабельный товар будет другим. Найдем новую прибыль в задаче. Так как цена чашки «Эспрессо» увеличилась на 20 ден. ед., то при пересчете прибыли достаточно эту величину умножить на количество выпускаемых чашек «Эспрессо» и добавить к тому суммарному доходу, который получен в задаче. Таким образом новая прибыль равна 5200 ден. ед.

Задание 4.

Поскольку кофейные зерна являются дефицитным ресурсом, то любое изменение количества этого ресурса изменит не только оптимальный план, но и прибыль. Предположим, что общее количество кофейных зерен уменьшилось

на 2 ед. Как было указано выше, увеличение на одну единицу количества этого ресурса приведет к увеличению прибыли на 30 ден. ед. Следовательно, при уменьшении этого ресурса на 2 ед. прибыль уменьшиться на 60 ден. ед., и будет равна 4340 ден. ед.

Задание 5.

Предположим, что стоимость одной чашки «Капучино» будет равна 100 ден. ед. Согласно отчету по устойчивости пока стоимость этого кофе будет меньше 200 ден. ед. оптимальный план и суммарный доход останутся прежними. Поэтому стоимость чашки 100 ден. ед. не изменит оптимальный план $x^* = (0, 40, 30)$ и прибыль $f(x^*) = 4400$ ден. ед.

Задание по теме «Решение оптимизационных задач в MS Excel»

Вариант № 1

На кондитерскую фабрику города Покров перед Новым годом поступили заказы на подарочные наборы конфет из магазинов. Возможные варианты наборов, их стоимость и товарные запасы представлены в таблице

Наименование конфет	Вес конфет в наборе, кг			Запас конфет, кг
	набор № 1	***набор № 2***	***набор № 3***	
«Сникерс»	0,3	0,2	0,4	600
«Марс»	0,2	0,3	0,2	700
«Баунти»	0,2	0,1	0,1	500
Цена, р.	72	62	76	

Определите оптимальное количество подарочных наборов, обеспечивающее максимальный доход от продажи.

1. Объясните смысл данных отчета по результатам и устойчивости.
2. Указать рентабельные и нерентабельные подарочные наборы.
3. Указать дефицитные и недефицитные конфеты.
4. Как изменится оптимальный план и суммарный доход от реализации подарочных наборов, если стоимость первого подарочного набора станет равна 80 р.?
5. Как изменится суммарный доход, если количество конфет «Марс» увеличить на 100 кг.?
6. Как отразиться на суммарном доходе производство одного подарочного набора № 3?

Вариант № 2

Фирма производит и продает спальные гарнитуры «Гармония», «Сладкий сон» и «Нежность» из древесины трех видов. Расход каждого вида древесины в кубометрах на каждое изделие задан в таблице

Виды древесины	Расход древесины, куб.м.			Запас древесины, куб.м.
	«Гармония»	***«Сладкий сон»***	***«Нежность»***	
Дуб	0,2	0,1	0,4	360
Сосна	0,4	0,2	0,2	5200
Орех	0,1	0,1	0,2	220
Стоимость, тыс. р.	22	18	30	

Определите оптимальное количество спальных гарнитуров каждого вида, которое следует поставлять на продажу для получения максимального дохода фирмы.

1. Объясните смысл данных отчета по результатам и устойчивости.
2. Указать рентабельные и нерентабельные спальные гарнитуры.
3. Указать дефицитные и недефицитные виды древесины.
4. Как изменится оптимальный план и суммарный доход от реализации спальных гарнитуров, если стоимость гарнитура «Гармония» увеличить на 10 тыс. р.?
5. Как изменится оптимальный план и суммарный доход от реализации спальных гарнитуров, если стоимость гарнитура «Гармония» будет равна 15 тыс. р.?
6. Как изменится суммарный доход от реализации спальных гарнитуров, если запас дуба составит 300 куб.м.?

Вариант № 3

Издательский дом «Герцен-Медиа» издает три журнала: «Караван», «Chip» и «Автомир», которые печатаются в трех типографиях: «Алмаз-Пресс», «Карелия-Принт» и Hansaprint (Финляндия), где общее количество часов, отведенное для печати, и производительность печати одной тысячи экземпляров ограничены и представлены в следующей таблице

Типография	Время печати одной тысячи экземпляров			Ресурс времени, отведенный типографией, час
	«Караван»	***«Chip»***	***«Автомир»***	
Алмаз-Пресс	2	4	5	92
Карелия-Принт	4	2	3	76
Hansaprint	6	4	4	80
Оптовая цена, р./шт.	17	20	13	

Определите оптимальное количество издаваемых журналов, которое обеспечит максимальную выручку от продажи.

1. Объясните смысл данных отчета по результатам и устойчивости.

2. Указать рентабельные и нерентабельные журналы.

3. Как изменится оптимальный план и суммарный доход от реализации журналов, если стоимость журнала «Караван» станет равна 15 р.?

4. Как изменится суммарный доход, если ресурс времени, отведенный типографией «Алмаз-Пресс» станет равным 100 часов?

5. Сколько времени работает типография Hansaprint, чтобы напечатать оптимальное количество журналов?

6. Как отразиться на суммарном доходе производство одной тысячи журналов «Автомир»?

Вариант № 4

Фирма решила открыть на основе технологии производства чешского стекла, фарфора и хрусталя линию по изготовлению ваз, графинов и сервизов и их декорированию. Затраты сырья на производство этой продукции представлены в таблице

Сырье	Расход сырья на производство			Поставки сырья в неделю, кг
	ваза	***графин***	***сервиз***	
Кобальт	2	1,5	2	300
Сусальное 24-каратное золото	2	1	2	250
Серебро	1	1	3	400
Оптовая цена, ден. ед./шт.	700	500	600	

Определите оптимальный объем выпуска продукции, обеспечивающий максимальный доход от продаж.

1. Объясните смысл данных отчета по результатам и устойчивости.

2. Указать рентабельную и нерентабельную продукцию.

3. Указать дефицитное и недефицитное сырье.

4. Как изменится оптимальный план и суммарный доход от реализации продукции, если оптовую цену вазы уменьшить на 10 ден. ед.?

5. Как изменится оптимальный план и суммарный доход от реализации продукции, если оптовую цену графина увеличить на 20 ден. ед.?

6. Как изменится суммарный доход от реализации продукции, если запас сусального 24-каратного золота составит 270 кг. в неделю?

Вариант № 5

Фирма производит одежду для охотников, туристов и охранных структур. Дополнительно фирма решила изготавливать шапки, подстежки и жилета из натурального меха. Затраты на производство этих изделий и запасы сырья представлены в таблице.

Сырье	Расход сырья на производство			Средний запас в месяц, ед.
	шапки	***подстежки***	***жилеты***	
Мех	22	140	60	60000
Ткань	1,5	30	15	1350
Фурнитура	5	15	10	700
Оптовая цена, ден. ед./шт.	400	1600	1000	

Определите объемы производства этих изделий, обеспечивающие максимальный доход от продажи.

1. Объясните смысл данных отчета по результатам и устойчивости.
2. Указать рентабельное и нерентабельное изделие.
3. Указать дефицитное и недефицитное сырье.
4. Как изменится оптимальный план и суммарный доход от реализации изделий, если оптовую цену подстежки уменьшить на 50 ден. ед.?
5. Как изменится суммарный доход от реализации изделий, если средний запас ткани увеличить на 20 ед. в месяц?
6. Сколько мех используется на производстве, чтобы изготовить оптимальное количество изделий?

Вариант № 6

Коммерческие расчеты, проведенные студентами в деревне, привели к более выгодному использованию яблок и груш путем их засушки и последующей продажи зимой в виде смеси сухофруктов, варианты которых представлены в таблице

Плоды	Расход плодов на производство 1 кг смеси			Сборка плодов, кг/день
	смесь 1	***смесь 2***	***смесь 3***	
Анис (яблоки)	0,25	0,25	0,3	15
Штрейфлинг (яблоки)	1	0,25	0,55	25
Груши	0	0,5	0,6	16
Оптовая цена, р./кг.	40	50	35	

Определите оптимальное количество упаковок сухофруктов по 1 кг смесей первого, второго и третьего вида, которое необходимо заготавливать в деревне ежедневно для обеспечения максимального дохода от продажи в день.

1. Объясните смысл данных отчета по результатам и устойчивости.

2. Указать рентабельные и нерентабельные смеси.

3. Указать дефицитные и недефицитные плоды.

4. Как изменится оптимальный план и суммарный доход от реализации упаковок с сухофруктами, если оптовая цена первой смеси будет равна 30 р.?

5. Как изменится оптимальный план и суммарный доход от реализации упаковок с сухофруктами, если оптовая цена второй смеси составит 60 р.?

6. Как изменится суммарный доход от реализации упаковок с сухофруктами, если ежедневный запас груш составит 20 кг.?

Вариант № 7

Кондитерская фабрика в Покрове освоила выпуск новых видов шоколада «Лунная начинка», «Малиновый дождик» и «Ягодная полянка». По причине занятости трех цехов выпуском традиционных видов шоколада каждый цех может выделить только ограниченный ресурс времени в месяц. В силу специфики технологического оборудования затраты времени на производство шоколада разные, данные представлены в таблице

Номер цеха	Время на производство 1 кг. шоколада			Время, отведенное цехами под производство, час./мес.
	«Лунная начинка»	***«Малиновый дождик»***	***«Ягодная полянка»***	
I	1	4	2	56
II	2	3	4	35
III	3	2	2	40
Оптовая цена, р./кг.	80	60	35	

Определите оптимальный объем выпуска шоколада, обеспечивающий максимальную выручку от продажи.

1. Объясните смысл данных отчета по результатам и устойчивости.

2. Указать рентабельные и нерентабельные виды шоколада.

3. Как изменится оптимальный план и суммарный доход от реализации шоколада, если оптовая цена шоколада «Ягодная полянка» станет равна 40 р.?

4. Как изменится оптимальный план и суммарный доход от реализации шоколада, если оптовая цена шоколада «Малиновый дождик» станет равна 100 р.?

5. Как изменится суммарный доход, если время, отведенное вторым цехом на производство шоколада, увеличить на 5 часов?

6. Сколько времени тратит первый цех для производства оптимального количества шоколада?

Вариант № 8

Компания выпускает продукцию, используя для этого три вида технологий и три вида ресурсов – оборудование, сырье и рабочую силу. Нормы расхода ресурсов при производстве единицы продукции по каждой технологии, а также имеющиеся запасы ресурсов приведены в таблице

Ресурсы	Расход ресурсов при производстве единицы продукции, усл.ед.			Запас ресурсов, усл.ед.
	технология 1	***технология 2***	***технология 3***	
Оборудование	10	14	8	164
Сырье	6	4	10	166
Рабочая сила	6	4	8	124
Прибыль, ден. ед./шт.	70	30	80	

Определить, сколько продукции по каждой технологии необходимо производить, чтобы получить максимальную прибыль от ее реализации.

1. Объясните смысл данных отчета по результатам и устойчивости.

2. Указать рентабельные и нерентабельные виды технологий.

3. Указать дефицитные и недефицитные ресурсы.

4. Как изменится оптимальный план и суммарная прибыль от реализации продукции, если прибыль от единицы продукции, выпущенной по первой технологии, уменьшить на 5 ден. ед.?

5. Как изменится оптимальный план и суммарная прибыль от реализации продукции, если прибыль от единицы продукции, выпущенной по второй технологии, увеличить на 10 ден. ед.?

6. Как изменится суммарная прибыль, если оборудование, используемое на производстве, будет в количестве 160 усл.ед.?

Вариант № 9

Для производства трех сортов мороженого (сливочного, молочного и пломбира) комбинат использует сливки и сахар. Затраты этих продуктов и их суточные запасы приведены в таблице

Ресурсы	Расход на производство 1 кг. мороженого			Общий запас ресурсов
	сливочное	***молочное***	***пломбир***	
Сливки, кг	0,2	0,1	0,4	160
Сахар, кг	0,2	0,4	0,2	240
Трудоемкость, чел./час.	2	3	3	1800
Цена, р.	75	60	90	

Считая, что сбыт мороженого полностью обеспечен, сколько сливочного, молочного мороженого и пломбира должен выпускать в сутки комбинат, чтобы доход от реализации был максимальным.

1. Объясните смысл данных отчета по результатам и устойчивости.
2. Указать рентабельные и нерентабельные виды мороженого.
3. Указать дефицитные и недефицитные виды ресурсов.
4. Как изменится оптимальный план и суммарный доход от реализации мороженого, если цена сливочного мороженого станет равна 100 р.?
5. Как отразиться на суммарном доходе производство двух килограмм мороженого пломбир?
6. Как изменится суммарный доход от реализации мороженого, если трудоемкость снизить на 100 чел./час.?

Вариант № 10

Для производства карамели двух трех видов «Аленка», «Цитрусовый микст» и «Барбарис» кондитерская фабрика использует сахар, фруктовое пюре и какао. Нормы расхода этих продуктов и общий запас производственных ресурсов указан в таблице

Ресурсы	Расход на производство 1 кг карамели			Общий запас ресурсов, кг.
	«Аленка»	***«Цитрусовый микст»***	***«Барбарис»***	
Сахар	0,2	0,6	0,4	180
Фруктовое пюре	0,4	0,2	0,2	120
Какао	0,4	0,5	0,3	180
Оптовая цена, ден. ед./кг.	45	60	70	

Считая, что сбыт конфет полностью обеспечен, определить, сколько карамели надо выпускать фабрике, чтобы доход от реализации был максимальным.

1. Объясните смысл данных отчета по результатам и устойчивости.
2. Указать рентабельные и нерентабельные виды карамели.

3. Указать дефицитные и недефицитные ресурсы.

4. Как изменится оптимальный план и суммарный доход от реализации карамели, если оптовую цену 1 кг карамели «Аленка» уменьшить на 5 ден. ед.?

5. Как изменится суммарный доход от реализации карамели, если количество сахара увеличить на 20 кг.?

6. Как изменится суммарный доход от реализации карамели, если количество какао станет равно 200 кг.?

Вариант № 11

Для выпуска трех сортов теста (бисквитное, песочное и слоеное) кондитерская фабрика использует яйца и сахар. Расход этих ресурсов, а также затраты труда и общее количество имеющихся ресурсов приведены в таблице

Ресурсы	Расход на производство 1 кг теста			Общий запас ресурсов
	бисквитное	***песочное***	***слоеное***	
Яйца, шт.	5	2	6	1000
Сахар, кг.	0,3	0,25	0,3	75
Трудоемкость, чел./час.	0,25	0,5	0,5	125
Оптовая цена, р./кг.	16	13	18	

Считая, что сбыт теста полностью обеспечен, определить, сколько теста каждого вида надо производить, чтобы доход от реализации был максимальным.

1. Объясните смысл данных отчета по результатам и устойчивости.

2. Указать рентабельные и нерентабельные виды теста.

3. Указать дефицитные и недефицитные ресурсы.

4. Как изменится оптимальный план и суммарный доход от реализации теста, если оптовую цену 1 кг бисквитного теста уменьшить на 2 р.?

5. Как изменится оптимальный план и суммарный доход от реализации теста, если оптовую цену 1 кг слоеного теста увеличить на 2 р.?

6. Как изменится суммарный доход от реализации теста, если количество яиц станет равно 1100 шт.?

Вариант № 12

Филиал завода изготавливает корпуса для холодильников наиболее популярных марок «Орск», «Минск» и «Стинол», комплектуя затем их оборудованием, поставляемым другими предприятиями. В таблице указаны нормы затрат материалов для изготовления корпусов, месячные объемы ресурсов и прибыль от реализации холодильника каждой марки

Ресурсы	Расход на один холодильник			Объем ресурсов
	«Орск»	***«Минск»***	***«Стинол»***	
Металл, кв.м.	2	2	1	850
Пластик, кв.м.	1	1	2	400
Краска, кг	2	2	2	500
Прибыль, усл.ед./шт.	40	150	100	

Определить, сколько холодильников необходимо производить, чтобы получить максимальную прибыль от их реализации.

1. Объясните смысл данных отчета по результатам и устойчивости.
2. Указать рентабельные и нерентабельные холодильники.
3. Указать дефицитные и недефицитные ресурсы.
4. Как изменится оптимальный план и суммарная прибыль от реализации холодильников, если прибыль от холодильника «Минск» станет равна 200 усл.ед.?
5. Как изменится суммарная прибыль от реализации холодильников, если количество металла уменьшить на 50 кв.м.?
6. Как изменится суммарная прибыль от реализации холодильников, если количество краски увеличить на 100 кг.?

Вариант № 13

Для продажи меха на престижных аукционах на ферме выращиваются голубая норка, песец и лиса. Чтобы обеспечить нормальные условия их выращивания, используют три вида кормов. Количество корма каждого вида, которое должно получать каждое животное, запасы корма каждого вида и прибыль от реализации одной шкурки животного приведены в таблице

Вид корма	Количество корма, которое ежедневно получает животное			Запасы корма, кг
	голубая норка	***песец***	***лиса***	
Овощи	2	3	2	180
Крупа	4	1	3	240
Мясо	6	3	3	426
Прибыль от одной шкурки, усл.ед.	320	240	200	

Определить, сколько норок, песцов и лис следует выращивать, чтобы прибыль от реализации их шкурок была максимальной.

1. Объясните смысл данных отчета по результатам и устойчивости.
2. Указать рентабельные и нерентабельные животные.
3. Указать дефицитные и недефицитные корма.

4. Как изменится оптимальный план и суммарная прибыль от реализации шкурок, если прибыль от одной шкурки голубой норки увеличить на 100 усл.ед.?

5. Как изменится суммарная прибыль от реализации шкурок, если количество овощей увеличить на 20 кг.?

6. Сколько мяса съедают все выращиваемые животные.

Вариант № 14

Городской хладокомбинат выпускает мороженое трех видов: пломбир, крем-брюле и эскимо. Для организации производственного процесса комбинат использует сливки и сахар, готовую продукцию на комбинате замораживают в холодильниках. Расход ресурсов на производство мороженого указан в таблице

Ресурсы	Расход на производство 1 кг. мороженого			Объем ресурсов
	пломбир	***крем-брюле***	***эскимо***	
Сливки, кг	0,6	0,4	0,7	360
Сахар, кг	0,4	0,3	0,3	300
Морозильник, час.	1,5	1,5	2	240
Оптовая цена, ден. ед.	65	85	115	

Найти оптимальный план производства мороженого, обеспечивающий наибольшую выручку от его реализации.

1. Объясните смысл данных отчета по результатам и устойчивости.

2. Указать рентабельные и нерентабельные виды мороженого.

3. Указать дефицитные и недефицитные ресурсы.

4. Как отразиться на суммарном доходе производство десяти килограмм мороженого пломбир?

5. Как изменится оптимальный план и суммарный доход от реализации мороженого, если оптовую цену мороженого эскимо увеличить на 5 ден. ед.?

6. Как изменится суммарный доход от реализации мороженого, если количество сливок уменьшить на 60 кг.?

Вариант № 15

Мебельная фабрика производит наборы мягкой мебели «Изабелла», «Эстет» и «Релакс». Расход ресурсов на производство одного набора и общее количество имеющихся ресурсов приведены в таблице

Ресурсы	Расход на производство одного набора мебели			Общий запас ресурсов
	«Изабелла»	***«Эстет»***	***«Релакс»***	
Древесина, куб.м.	5	6	4	360
Кожа, кв.м.	10	15	12	200
Трудоемкость, чел./час.	2,5	3	4	100
Цена одного набора, усл.ед./шт.	18000	24000	20000	

Считая, что сбыт готовой продукции полностью обеспечен, определить, сколько наборов мягкой мебели надо выпускать фабрике, чтобы доход от реализации был максимальным.

1. Объясните смысл данных отчета по результатам и устойчивости.
2. Указать рентабельные и нерентабельные наборы мягкой мебели.
3. Указать дефицитные и недефицитные ресурсы.
4. Как изменится суммарный доход от реализации наборов мягкой мебели, если количество древесины увеличить на 100 куб.м.?
5. Как изменится суммарный доход от реализации наборов мягкой мебели, если количество кожи увеличить на 100 кв.м.?
6. Как изменится суммарный доход от реализации мебели, если пустить в продажу один набор мебели «Эстет»?

Вариант № 16

Фабрика выпускает три вида тканей: ситец, бязь и сатин. Ресурсы фабрики: производственное оборудование, сырье и электроэнергия. Расход ресурсов на один метр ткани представлен в таблице

Ресурсы	Расход на производство одного метра ткани			Общий запас ресурсов
	ситец	***бязь***	***сатин***	
Оборудование	2	3	3	600
Сырье	1	8	5	800
Электроэнергия	3	4	4	600
Оптовая цена, ден. ед.	80	100	90	

Найти план производства тканей, при котором суммарный доход фабрики будет максимальным.

1. Объясните смысл данных отчета по результатам и устойчивости.
2. Указать рентабельные и нерентабельные виды ткани.
3. Указать дефицитные и недефицитные ресурсы.

4. Как изменится оптимальный план производства и суммарный доход от реализации ткани, если оптовую цену ситца увеличить на 5 ден. ед.?

5. Как изменится суммарный доход от реализации ткани, если докупить еще 50 ед. оборудования?

6. Как изменится суммарный доход от реализации ткани, если выпустить десять метров сатина?

Вариант № 17

Швейная фабрика выпускает юбки, брюки и блузки, используя имеющееся оборудование, электроэнергия и ткань. Расход ресурсов на производство одной единицы продукции и запасы этих ресурсов приведены в таблице

Ресурсы	Расход на производство одного изделия			Общий запас ресурсов
	юбка	***брюки***	***блузка***	
Оборудование	2	3	3	602
Электроэнергия	4	2,5	5	1001
Ткань	1,5	2	3	900
Стоимость, ден. ед.	1250	1500	1650	

Найти план производства изделий, при котором суммарный доход швейной фабрики будет максимальным.

1. Объясните смысл данных отчета по результатам и устойчивости.

2. Указать рентабельные и нерентабельные виды изделий.

3. Указать дефицитные и недефицитные ресурсы.

4. Как изменится оптимальный план производства и суммарный доход от реализации изделий, если стоимость юбки увеличить на 50 ден. ед.?

5. Как изменится оптимальный план производства и суммарный доход от реализации изделий, если стоимость брюк станет равна 1800 ден. ед.?

6. Как изменится суммарный доход от реализации изделий, если количество оборудования уменьшить на 50 ед.?

Вариант № 18

Фабрика по производству мягких игрушек выпускает собачек, мишек и зайчиков. Для их производства используется поролон, ткань и стразы. Расход этих материалов и их суточный запас представлен в таблице

Материал	Расход на производство одного изделия			Суточный запас материалов
	собачка	***мишка***	***зайчик***	
Ткань, м	1	1,5	1	900
Поролон, кг	2	1	3	800
Стразы, шт.	6	8	15	2000
Стоимость, ден. ед.	200	300	450	

Найти план производства фабрики игрушек, при котором суммарный доход от реализации будет максимальным.

1. Объясните смысл данных отчета по результатам и устойчивости.

2. Указать рентабельные и нерентабельные игрушки.

3. Указать дефицитный и недефицитный материал.

4. Как изменится оптимальный план производства и суммарный доход от реализации игрушек, если стоимость зайчика увеличить на 20 ден. ед.?

5. Как изменится оптимальный план производства и суммарный доход от реализации игрушек, если стоимость мишки увеличить на 50 ден. ед.?

6. Как изменится суммарный доход от реализации игрушек, если количество страз увеличить на 1000 шт.?

Вариант № 19

Кондитерская фабрика «Заря» выпускает конфеты трех видов «Ромашка», «Василек» и «Незабудка». Для производства этих конфет на фабрике используется сахар, шоколад и орехи. Расход ресурсов на один килограмм конфет приведен в таблице

Ресурсы	Расход на производство 1 кг. конфет			Объем ресурсов
	«Ромашка»	***«Василек»***	***«Незабудка»***	
Сахар, кг	0,4	0,5	0,3	130
Шоколад, кг	0,3	0,4	0,2	175
Орехи, кг.	0,3	0,2	0,3	120
Оптовая цена, ден. ед.	110	120	85	

Найти план производства кондитерской фабрики, при котором суммарный доход от реализации будет максимальным.

1. Объясните смысл данных отчета по результатам и устойчивости.

2. Указать рентабельные и нерентабельные конфеты.

3. Указать дефицитный и недефицитный ресурс.

4. Как изменится оптимальный план производства и суммарный доход от реализации конфет, если оптовая цена конфет «Ромашка» станет равна 112 ден. ед.?

5. Как изменится оптимальный план производства и суммарный доход от реализации конфет, если оптовую цену конфет «Василек» уменьшить на 10 ден. ед.?

6. Как изменится суммарный доход от реализации конфет, если количество орех увеличить на 5 кг.?

Вариант № 20

Чаеразвесочная фабрика выпускает чай «Утро Нефертити», «Бенгальский тигр» и «Императорский чай», смешивая три ингредиента: индийский, грузинский и краснодарский чай. В таблице приведены нормы расхода ингредиентов, объем запасов и прибыль от реализации 1 т. чая.

Ингредиенты	Нормы расхода на производство 1 т. чая			Объем запасов
	«Утро Нефертити»	***«Бенгальский тигр»***	***«Императорский чай»***	
Индийский чай	0,5	0,2	0,3	320
Грузинский чай	0,2	0,6	0,5	290
Краснодарский чай	0,3	0,2	0,3	345
Прибыль от 1 тонны, ден. ед.	320	290	345	

Найти план производства чаеразвесочной фабрики, при котором суммарная прибыль от реализации чая будет максимальной.

1. Объясните смысл данных отчета по результатам и устойчивости.
2. Указать рентабельные и нерентабельные виды чая.
3. Указать дефицитные и недефицитные ингредиенты.
4. Как изменится суммарная прибыль от реализации чая, если количество грузинского чая увеличить на 200 т.?
5. Как отразится на суммарной прибыли производства одной тонны «Императорского чая»?
6. Сколько индийского чая используется для производства оптимального количества трех сортов чая?

Динамическое программирование

Динамическое программирование представляет собой математический аппарат, который подходит к решению некоторого класса задач путем разложения их разложения на части, небольшие и менее сложные задачи. При этом отличительной особенностью является решение задач по этапам, через фиксированные интервалы, промежутки времени, что и определило появление термина «динамическое программирование». Следует заметить, что методы динамического программирования успешно применяются и при решении задач, в которых фактор времени не учитывается. В целом математический аппарат можно представить, как пошаговое, или поэтапное, программирование. Решение задач методами динамического программирования проводится на основе сформулированного Р. Беллманом принципа оптимальности: оптимальное поведение об-

ладает тем свойством, что какими бы ни были первоначальное состояние системы и первоначальное решение, последующее решение должно определять оптимальное поведение относительно состояния, полученного в результате первоначального решения.

Из этого следует, что планирование каждого шага должно проводиться с учётом выбора общей выгоды, получаемой по завершении всего процесса, что и позволяет оптимизировать конечный результат по выбранному критерию.

Таким образом, динамическое программирование в широком смысле представляет собой оптимальное управление процессом посредством изменения управляемых параметров на каждом шаге и, следовательно, воздействия на ход процесса с изменением на каждом шаге состояния системы.

Сетевые модели оптимизации

Существует большое количество практических задач, которые можно сформулировать как сетевые модели. Примерами могут служить: задача прокладки кабельных сетей в несколько домов с минимальным расходом кабеля; выбор кратчайшего маршрута между двумя станциями метро; определение схемы транспортировки продукции от пунктов производства в пункты потребления с минимальными транспортными затратами и т.д.

Прежде чем перейдем к рассмотрению сетевой задачи, дадим ряд определений.

Сетью называется структура, состоящая из точек (узлов) и соединяющих их отрезков (дуг), причем каждой дуге поставлено в соответствие некоторое число. Сеть может ассоциироваться со схемой дорог, системой трубопроводов, компьютерными сетями и т.п. Числа на дугах могут выражать длину, время, стоимость, пропускную способность звена сети.

Путем между двумя узлами сети называется непрерывная последовательность дуг, соединяющая эти узлы. Путь, у которого начальный и конечный узлы совпадают, является циклом. Примером цикла может служить кольцевая линия метрополитена. Длиной пути называется сумма чисел на дугах, входящих в данный путь.

Мы рассмотрим одну из моделей сетевых задач оптимизации.

Задача о нахождении кратчайшего пути

Математический аппарат динамического программирования, основанный на пошаговой оптимизации, может быть использован при нахождении кратчайших расстояний. Решение задачи по определению кратчайших расстояний между пунктами отправления и пунктами получения продукции по существу-

ющей транспортной сети является исходным этапом при решении таких экономических задач, как оптимальное прикрепление потребителей к поставщикам, повышение производительности транспорта за счет сокращения непроизводительного пробега и др.

Пример 1. Города 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 соединены сетью дорог. Числа в клетках таблицы означают расстояния между городами, соединенными прямыми путями. Прочерки означают, что нет прямой дороги, соединяющей пару городов.

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	4	3	–	10	–	–
2		0	5	9	4	–	12
3			0	5	–	8	–
4				0	2	7	6
5					0	–	5
6						0	4
7							0

Требуется найти самый короткий маршрут доставки груза.

Построим сеть, описывающую предложенные маршруты.

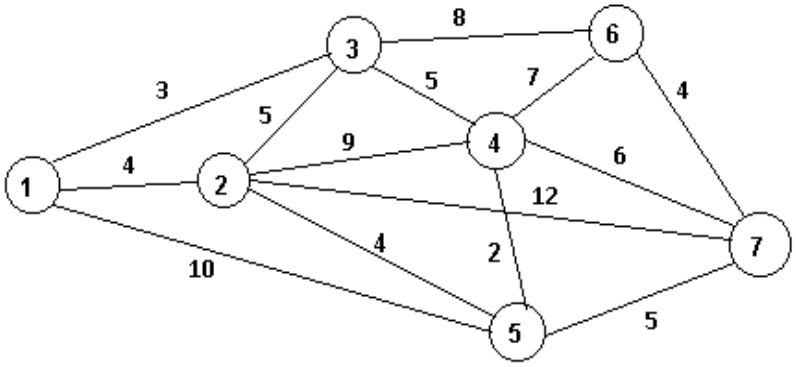


Рис. 1

Для нахождения кратчайшего маршрута из города 1 в город 7 применим принцип оптимальности Р. Беллмана, согласно которому *для любого промежуточного пункта оптимального пути оставшаяся его часть должна обладать наименьшей длиной*. Поскольку мы не знаем, через какие города пройдет оптимальный маршрут, будем искать оптимальные продолжения для всех узлов сети.

Обозначим через t_{ij} время перехода из города i в соседний город j (числа на отрезках сети, соединяющих города i и j), T_i – минимальное время

движения из города i в конечный город 7. Решением задачи будет число T_1, равное минимальному времени перехода из 1 в 7 город. Чтобы найти это решение, надо предварительно вычислить T_7, $T_6, ...,$ T_2.

В соответствие с методом обратной прогонки, возле каждого узла i будем записывать число T_i, равное минимальному расстоянию от этого узла до конечного города. На рис. 2 эти числа изображены в квадратах, в тексте выделены жирным шрифтом. Решение начинается с последнего узла 7, поскольку расстояние от города 7 до него самого, очевидно, равно 0.

Итак, $T_7 = 0$.

Далее последовательно найдем $T_6, T_5, T_4, ..., T_1$, руководствуясь принципом оптимальности. Если из города выходит несколько дуг, то выбираем ту, для которой ее длина плюс число возле узла, в который она входит, будет наименьшей. Так как из городов 6 и 5 можно попасть в конечный город 7 только единственным путем, то минимальное расстояние от этих городов до конечного будет совпадать с числами на дугах

$$T_6 = t_{67} + T_7 = 4 + \mathbf{0} = \mathbf{4},$$

$$T_5 = t_{57} + T_7 = 5 + \mathbf{0} = \mathbf{5}.$$

Из города 4 выходят три дуги. Складывая их длины с числами возле узлов, в которые они заходят, выбираем наименьшую сумму

$$T_4 = \min\{t_{45} + T_5,\ t_{46} + T_6,\ t_{47} + T_7\} = \min\{2 + \mathbf{5}, 7 + \mathbf{4}, 6 + \mathbf{0}\} = \mathbf{6}.$$

Оптимальный путь по дуге $4 \to 7$.

Действуя аналогично, последовательно найдем

$$T_3 = \min\{t_{34} + T_4,\ t_{36} + T_6\} = \min\{5 + \mathbf{6}, 8 + \mathbf{4}\} = \mathbf{11}.$$

Оптимальный путь из города 3 в город 4.

$$T_2 = \min\{t_{23} + T_3,\ t_{24} + T_4,\ t_{25} + T_5, t_{27} + T_7\} =$$
$$= \min\{5 + \mathbf{11}, 9 + \mathbf{6}, 4 + \mathbf{5}, 12 + \mathbf{0}\} = \mathbf{9}.$$

Оптимальный путь по дуге $2 \to 5$.

$$T_1 = \min\{t_{12} + T_2,\ t_{13} + T_3,\ t_{15} + T_5\} = \min\{4 + \mathbf{9}, 3 + \mathbf{11}, 10 + \mathbf{5}\} = \mathbf{13}.$$

Оптимальный путь проходит по дуге $1 \to 2$.

Число $T_1 = 13$ является искомым минимальным расстоянием между городами 1 и 7. Соединив последовательно стрелки от города 1 к городу 7, получаем кратчайший маршрут $1 \to 2 \to 5 \to 7$.

Задание по теме «Динамическое программирование»

Города 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 соединены сетью дорог. Числа в клетках таблицы означают расстояния между городами, соединенными прямыми путями. Прочерки означают, что прямой дороги нет, соединяющей пару городов

Города	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	3	2	4	-	-	-	-
2		0	3	-	6	2	-	-
3			0	2	-	5	4	-
4				0	-	5	6	5
5					0	1	-	5
6						0	-	3
7							0	3
8								0

Задание.

Найти кратчайший маршрут из города 1 в город 8, перемещаясь из пунктов с меньшими номерами в пункты с большими номерами.

Решение оформить в виде таблицы

Город	Минимальное расстояние от i-города до города 8	Оптимальный переход от i-города до города 8
8		
7		
6		
5		
4		
3		
2		
1		

Список рекомендуемой литература

1. Аксенюшкина Е.В., Тарасенко Н.В., Тимофеев С.В. Математика – 2. Нелинейное и линейное программирование. – Иркутск: Изд-во БГУЭП, 2009.
2. Афанасьев М.Ю., Багриновский К.А., Матюшок В.М. Прикладные задачи исследования операций. – М.: ИНФРА-М, 2006.
3. Афанасьев М.Ю., Суворов Б.П. Исследование операций в экономике. – М.: ИНФРА-М, 2003.
4. Балдин К.В., Бащлыков В.Н., Рокосуев А.В. Математические методы и модели в экономике. – М.: Флинта, 2012.
5. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем. – М.: Финансы и статистика, 2001.
6. Гаврилец Ю.Н. Целевые функции социально-экономического планирования. – М.: Наука, 1983.
7. Гармаш А.Н., Орлова И.В. Математические методы в управлении. – М.: Вузовский учебник: ИНФРА-М, 2013.
8. Глухов В.В., Медников М.Д., Коробко С.Б. Математические методы и модели в менеджменте. – СПб.: Изд-во СПб. ГТУ, 2000.
9. Горчаков А.А., Орлова И.В. Компьютерные экономико-математические модели. – М.: ЮНИТИ, 1995.
10. Грешилов А.А. Прикладные задачи математического программирования. – М.: Логос, 2006.
11. Дубров А.М., Лагоша Б.А. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе. – М.: Финансы и статистика, 2000.
12. Зайцев М.Г., Варюхин С.Е. Методы оптимизации управления и принятия решений: примеры, задачи, кейсы. – М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2011.
13. Зайцев М.Г. Методы оптимизации управления для менеджеров: компьютерно-ориентированный подход. – М.: Издательство «Дело» АНХ, 2008.
14. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М.: Издательство «Дело и Сервис», 2009.
15. Иванилов Ю.П. Математические модели в экономике. – М.: Наука, 1999.
16. Ильченко А.Н. Экономико-математические методы. – М.: Финансы и статистика, 2006.
17. Карасев А.И., Кремер Н.Ш., Савельев Т.И. Математические методы и модели в планировании. – М.: Экономика, 1987.
18. Колемаев В.А. Математические методы и модели исследования операций. – М.: ЮНИТИ, 2008.

19. Компьютерное моделирование менеджмента / А.Ф. Горшков [и др.] ; по редакцией Н.П. Тихомирова. – М.: Издательство «Экзамен», 2007.

20. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Исследование операций в экономике. – М.: Издательство Юрайт; ИД Юрайт, 2010.

21. Лебедев В.В. Математическое моделирование социально-экономических процессов. – М.: Изограф, 1997.

22. Левин М.И., Макаров В.Л., Рубинов А.М. Математическое моделирование экономического взаимодействия. – М.: Физматлит, 1993.

23. Логинов В.Н. Управленческие решения: модели и методы. – М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2011.

24. Лотов А.В. Введение в экономико-математическое моделирование. – М.: Наука, 1984.

25. Мадера А.Г. Моделирование и принятие решений в менеджменте: Руководство для будущих топ-менеджеров. – М: Издательство ЛКИ, 2012.

26. Макарова С.И. Экономико-математические методы и модели. – М.:КНОРУС, 2009.

27. Методы оптимальных решений в экономике и финансах: учебник / И.А. Александрова [и др.] ; по редакцией В.М. Гончаренко, В.Ю. Попова. – М.: КНОРУС, 2010.

28. Мур Джеффри Х., Уэдерфорд Лари Р. И др. Экономическое моделирование в Microsoft Excel. – М.: Издательский дом «Вильмс», 2004.

29. Неймарк Ю.И. Простые математические модели и их роль в постижении мира. – Соровский образовательный журнал. – 1997. – № 3. – С. 139–143.

30. Новик И.Б. О философских вопросах кибернетического моделирования. – М.: Знание, 1964.

31. Орлова И.В. Экономико-математические методы и модели. Выполнение расчетов в среде Excel. – М.: ЗАО «Финстатинформ», 2000.

32. Пинегина М.В. Экономико-математические методы и модели. – М.: Экзамен, 2002.

33. Попов А.М., Сотников В.Н. Экономико-математические методы и модели. – М.: Издательство Юрайт, 2011. – серия: Бакалавр.

34. Просветов Г.И. Математические методы и модели в экономике: задачи и решения. – М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008.

35. Просветов Г.И. Анализ данных с помощью Excel: задачи и решения. – М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2015.

36. Решение экономических задач на компьютере / А.В. Каплан [и др.]. – М.: ДМК Пресс, 2008.

37. Савиных В.Н. Математическое моделирование производственного и финансового менеджмента. – М.: КНОРУС, 2012.

38. Салманов О.Н. Математическая экономика с применением Mathcad и Excel. – СПб: БХВ – Петербург, 2003.

39. Солянкин А.А Компьютеризация финансового анализа и прогнозирования в банке. – М.: Финстатинформ, 1998.

40. Таха Х.А. Введение в исследование операций. – М.: Вильмс, 2005.

41. Трояновский В.М. Математическое моделирование в менеджменте. – М.: Изд-во РДЛ, 2002.

42. Урубков А.Р., Федотов И.В. Методы и модели оптимизации управленческих решений. – М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2012.

43. Федосеев В.В., Гармаш А.Н., Орлова И.В. Экономико-математические методы и прикладные модели. – М.: Издательство Юрайт, 2012. – серия: Бакалавр. Базовый курс.

44. Федосеев В.В. Экономико-математические модели и прогнозирование рынка труда. – М.: Вузовский учебник, 2010.

45. Федосеев В.В., Эриашвили Н.Д. Экономико-математические методы и модели в маркетинге. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001.

46. Фомин Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности. – М.: Финансы и статистика; ИНФРА-М, 2009.

47. Хачатрян С.Р., Пинегина М.В., Буянов В.П. Методы и модели решения экономических задач. – М.: Издательство «Экзамен», 2005.

48. Шелехова Л.В. Методы оптимальных решений. – СПб.: Издательство «Лань», 2016.

49. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000.

Учебное издание

Аксенюшкина Елена Владимировна

Методы оптимальных решений: дистанционное обучение

Учебное пособие

Издается в авторской редакции

ИД № 06318 от 26.11.01.
Подписано в пользование 14.07.17.

Издательство Байкальского государственного университета.
664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11.
http://bgu.ru.